ANALIZA I
9 stycznia 2015
Semestr zimowy
II Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2, & \text{gdy } x\leq 0,\\ c\cos x+d, & \text{gdy } 0<x\leq \frac{\pi}{2},\\ dp^{\cos x}+p-1, & \text{gdy } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Dobrać parametry c,d,p tak, żeby ta funkcja była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Najpierw, sprawdzamy, że funkcja f jest ciągła w puncie $x=0$. To się zdarza kiedy $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$. W naszym przypadku, mamy, że

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{2}x^2+2=2,\qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=c\cos x+d=c+2.$$

Skoro $f(0)=2$ to otrzymamy, że $f(x)$ jest ciągła dla $x=0$ dla $c+d=2$. Dla $x=\pi/2$ mamy, że

$$\lim_{x\to\pi/2^-}f(x)=\lim_{x\to\pi/2^-}c\cos x+d=d,\qquad \lim_{x\to\pi/2^+}f(x)=\lim_{x\to\pi/2^+}dp^{\cos x}+p-1=p-1.$$

Skoro $f(\pi/2)=d$, to funkcja $f(x)$ jest ciągła w $x=\pi/2$ gdy $p-1=0$. Zatem, mamy, że

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2, & \text{gdy } x\leq 0,\\ c(\cos x-1)+2, & \text{gdy } 0<x\leq \frac{\pi}{2},\\ d, & \text{gdy } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Sprawdzmy teraz kiedy ta funkcja jest różniczkowalna. FUnkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w $x=0$ gdy $f'(0^-)=f'(0^+)$ i $f'(0)$ to jakaś liczba. Zatem,

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2/2+2-2}{x}=0.$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{c(\cos x-1)+2-2}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-c\sin x+2}{1}=-c.$$

Wówczas, $c=0$. Skoro $2=c+d$ to $d=2$. Posumując

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2, & \text{gdy } x\leq 0,\\ 2, & \text{gdy } 0<x.\end{cases}$$

Widać, że ta funkcja też jest różniczkowalna dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Zadanie 2. Oblicz granice:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sinh(x)+x^8}{x^4\sin^3(x)}$, gdzie $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$,
- $\lim_{x\to -\pi/2} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x+3\sin x+1}$,
- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$, $a, b > 0$.

Rozwiązanie: Aby rozwiązać pierwszą granicę korzystamy z wzorów Taylora dla licznika i mianownika do takiego stopnia n, że nie otrzymamy nieoznaczoności. Oczywiście, to się dzieje, kiedy takie rozwinięcia nie są równe zeru jednocześnie. Z znanych wzorów dla funkcji elementarnych mamy, że:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Zatem

$$\sin x - \sinh x + x^8 = -2x^3/3! - 2x^7/7!...$$

$$x^4 \sin^3 x = x^4 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right)^3 = x^7 + O(x^7).$$

Widać, że rozwinięcia siódmego stopnia nie zeruje jednocześnie mianownik i licznik (dla mnieszych stopni można to zrobić tak samo). Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x) + x^8}{x^4 \sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3/3! - 2x^7/7!}{x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{-2/3!}{x^4} - \frac{2}{7!} = -\infty.$$

Rozwiązujemy drugą granicę

$$\lim_{x\to -\pi/2} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x + 3\sin x + 1} = \frac{0}{0},$$

Skoro licznik i mianownik są funkcjami różniczkowalnymi i istnieje przedział wokół$x = -\pi/2$ gdzie pochodna mianownika nie zeruje się, to możemy napisać

$$\lim_{x\to -\pi/2} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x + 3\sin x + 1} \overset{\mathrm{L'Hop}}{=} \lim_{x\to -\pi/2} \frac{4\sin x \cos x + \cos x}{4\cos x \sin x + 3\cos x} = \lim_{x\to -\pi/2} \frac{4\sin x + 1}{4\sin x + 3} = 3.$$

W ostatnie granice mamy nieoznaczoność typu 1^∞:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = 1^\infty.$$

Aby rozwiązać tą granicę wprowadzamy ten problem do postaci gdzie można korzystać z L'Hôspitala. Na przykład jak następująco:

$$\ln \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$$

ponieważ funkcja $\ln(x)$ jest ciągła. Znowu mamy nieoznaczoność. Ale teraz to nioznaczoność typu $0/0$ i możemy korzystać z L'Hôpitala ponieważ funkcje w liczniku i w mianowniku są róż niczkowalne. Dodatkowo mamy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2}{a^x+b^x}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}.$$

Zatem

$$\ln \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \ln\sqrt{ab} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{ab}.$$

$\square$

Zadanie 3. Udowodnij, że

$$e^x < \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x/2}, \qquad x>0, n>0.$$

Rozwiązanie: Skoro $\ln^x$ to funkcja roznąca, to

$$e^x < \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x/2} \iff \ln e^x = x < \left(n+\frac{x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Zatem

$$e^x < \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x/2} \Leftrightarrow x-\left(n+\frac{x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < 0.$$

Teraz korzystamy z wzoru Taylora aby oszaczować lewa strona. Dana

$$f(x) = x-\left(n+\frac{x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right),$$

mamy, że

$$f(0)=0, \qquad \frac{df}{dx} = 1-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{(n+\frac{x}{2})}{1+\frac{x}{n}}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{2n+x}{2(n+x)}.$$

Zatem,

$$\frac{df}{dx}(0)=0, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{2(x+n)}+\frac{n}{2(n+x)^2} = -\frac{x}{(n+x)^2}.$$

Wówczas, rozwinięcie Taylora funkcji $f(x)$ pierwszego rządu wokół $x_0 = 0$ to

$$f(x) = R_1(x, 0) = -\frac{\theta}{(n+\theta)^2}x^2.$$

Dla $x > 0$ to $0 < \theta < x$ i $R_1(x, 0) < 0$. Więc, $f(x) < 0$ dla $x > 0$. $\square$

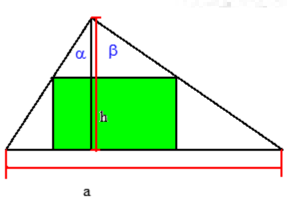
Zadanie 4. W trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden z boków prostokąta leży na danej podstawie trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki prostokąta leża na pozostałych boków trójkąta. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

Rozwiązanie: Widać, ze wysokosć prostokąta, δ, pozwala nam określić, że drugi bok prostokąta ma odległość $\operatorname{tg}\alpha(h-\delta)+\operatorname{tg}\beta(h-\delta) = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(h-\delta)$. Zatem, powierzchni prostokąta to

$$S(\delta) = \delta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(h - \delta).$$

Zatem,

$$\frac{dS}{d\delta} = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(h - 2\delta) \Rightarrow \frac{dS}{d\delta} = 0 \Leftrightarrow \delta = h/2.$$



Więc, mamy jeden punkt krytyczne dla $\delta_0 = h/2$ i powierzchni to $S(\delta_0) = h^2/4(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$. Skoro $h(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = a$ to $S(\delta_0) = ha/4$. $\square$

Zadanie 5. Oblicz szereg Taylora funkcji $(1 + x)^{5/2}$ do czwartego rzędu (włącznie) z resztą Lagrange wokół $x_0 = 0$.

Rozwiązanie: Funkcja $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 + x)^{5/2} \in \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -1\}$. Z tego powodu, dla każdego $x, x_0 \in D_f$ możemy zapisać funkcję $f(x)$ za pomocą wzoru Taylora wokół x_0 jak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0),$$

gdzie resztę, w postaci Lagrange'a, można zapisać jako:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

gdzie θ to jakaś liczba między x i x_0 (różna od x i x_0). W szczególności, dla $x_0 = 0$ mamy tzw wzór McLaurina

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Dla funkcji f mamy, że

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{5}{2}(1+x)^{3/2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{15}{4}(1+x)^{1/2}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}(x) = \frac{15}{8}(1+x)^{-1/2},$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-3/2}, \quad \frac{d^5 f}{dx^5}(x) = \frac{45}{32}(1+x)^{-5/2}.$$

Zatem,

$$\frac{df}{dx}(0) = \frac{5}{2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(0) = \frac{15}{4}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}(0) = \frac{15}{8}, \quad \frac{d^4 f}{dx^4}(0) = -\frac{15}{16}.$$

Wówczas,

$$f(x) = 1 + \frac{5}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{3}{256}(1+\theta)^{-5/2}x^5,$$

gdzie $0 < \theta < x$ lub $x < \theta < 0$.

□