ANALIZA I
10 października 2014
Semestr zimowy
Lista III

Indukcja matematyczna

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dowód niewymierności $\sqrt{3}$.

Zadanie 2. Udowodnić indukcyjnie, że:

- $(1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + \cdots + (n)(n!) = (n+1)! - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$,
- Nierówność Bernoulliego: $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$,
- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
- $q^0 + q^1 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$.

Zadanie 3. Udowodnić indukcyjnie, że liczba postaci $n^3 - n$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 4. Udowodnić indukcyjnie, że jeżeli $a, b \geq 0$, to

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 5. Udowodnić indukcyjnie, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.