ANALIZA I
31 października 2014
Semestr zimowy
Lista VII

Twierdzenie Stolza i metryki

Javier de Lucas

Zadanie 1. Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę:

$$a_n = \frac{1^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}} + \cdots + (2n+1)^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{5}{4}}}.$$

Zadanie 2. Sprawdzić, korzystając z Tw. Stolza, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^6} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = 2(\sqrt{2}-1).$$

Zadanie 3. Wykazać, że jeżeli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots a_n}{n + (n-1) + \ldots + 1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Zadanie 4. Narysować dla metryk L^1 oraz L^∞ z $\mathbb{R}^2$ d-odcinki, czyli zbiory

$$[a,b] := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 ; d(a,x) + d(x,b) = d(a,b) \right\}.$$

Zadanie 5. Narysować kule i d-odcinki w metryce „rzymskiej” w $\mathbb{R}^2$ czyli

$$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y|, x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \\ |x-y|, x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \end{cases},$$

gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Zadanie 6. Niech $X := K(0,1)$ (czyli $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$) zaś:

$$d(x,y) := \min(|x-y|, 2 - |x| - |y|).$$

Sprawdzić, że $d(x,y)$ jest metryką.