ANALIZA I
25 i 28 listopada 2014
Semestr zimowy
Lista XII

Rówania różniczkowe, styczna do krzywej i zastosowania pochodnych

Javier de Lucas

Zadanie 1. Wykazać, że funkcja $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0)$, gdzie a, ω, φ_0 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, spełnia równanie: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Zadanie 2. Niech $\phi(x) = f(x + vt) + g(x - vt)$, zaś $\psi(t) = f(x + vt) + g(x - vt)$, f, g są dwukrotnie różniczkowalne i $v \in \mathbb{R}$. Pokazać, że

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}(t, x) = v^2 \frac{d^2\phi}{dx^2}(t, x).$$

Podać interpretację wyrażenia $f(x + vt) + g(x - vt)$.

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność: $x^n - nx + n - 1 \geq 0$, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$ i n jest parzyste.

Zadanie 4. Pokazać, że wielomian $w_n(x) = x^n - x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, może mieć co najwyżej dwa rzeczywiste miejsca zerowe.

Zadanie 5. Która z liczb jest większa: e^π, czy π^e?

Zadanie 6. Znaleźć współrzędne punktu wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x$, w którym styczna jest równoległa do funkcji $g(x) = 5x$.

Zadanie 7. Znaleźć równanie stycznej do krzywej: $2x^2 - 3xy + y^2 = 4$ w punkcie $(3, 2)$.

Zadanie 8. Udowodnij, że linia $y = mx + c$ jest styczna do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jeżeli $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

Zadanie 9. Napisz równanie stycznej do krzywej $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x = 0$.

Zadanie 10. Pas do lądowania ma 2 km. Samolot ląduje na pasie. Odległość między hamującym samolotem a początkiem pasa opisuje wzór: $s = c + 100t - 4t^2$, gdzie t mierzymy w sekundach od momentu lądowania a c jest odległością miedzy punktem przyziemienia a początkiem pasa. Niech $c = 800m$. Znajdź odległość, jaką przebył samolot po 5. sekundach. Znajdź wzór na prędkość samolotu. Znajdź punkt P, w którym prędkość samolotu wynosiła 36 m/s. okaż, że jeżeli samolot wyląduje przed punktem P, to zatrzyma się przed końcem pasa startowego.