Zadanie 1 Dowód niewymierności $\sqrt{3}$.

Metoda 1. Załóżmy, że $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Więc możemy napisać, że $\sqrt{3} = m/n$, dla $m, n \in \mathbb{N}$ względnie pierwsze (nie mają wspólnych dzielników). Zatem

$$(\sqrt{3})^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = n^2 3 \Rightarrow 3 | m^2 \text{ (3 to dzielnik } m^2\text{)}$$

czyli

Przypomnijmy, że m i m^2 mają te same dzielniki pierwszy. Właśnie, m ma rozkład

$$m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \quad \text{jedyne rozkład.}$$

$p_1 \cdots p_r$ liczby pierwszy i $k_1 \cdots k_r \in \mathbb{N}$.

$$\Updownarrow$$

$$m^2 = p_1^{2k_1} \cdots p_r^{2k_r}$$

Więc, jeżeli 3 to dzielnik m^2, skoro jest liczbą pierwszą, to $3|m$. $\Rightarrow$ $m = 3m_1$, $m_1 \neq 1$. Zatem

$$3^2 m_1^2 = n^2 3 \Rightarrow 3m_1^2 = n^2 \Rightarrow 3|n^2 \Rightarrow 3|n$$

To sprzeczność ponieważ założyliśmy, że n i m nie mają wspólnych dzielników.

Metoda 2 $\sqrt{3}^2 = 3 \Rightarrow \sqrt{3}$ to pierwiastek wielomianu $x^2 - 3$, czyli $x^2 - 3 = 0$. Wiemy, że jeżeli $x \in \mathbb{Q}$ i $x = \frac{m}{n}$ (m, n względnie pierwsze) to $n | 1$ i $m | 3 \Rightarrow n$ to ± 1. $\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ To niemożliwe!! Więc $x \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 2 Udowodnić indukcyjnie, że

a) (1) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\,n! = (n+1)! - 1 \quad n\in \mathbb{N}^+$.

Musimy udowodnić, że

a) $n=1$, to (1) spełnia się:

lewa strona $1\cdot 1! = 1$
prawa strona $(1+1)! - 1 = 1$ } ok się spełnia.

b) musimy udowodnić, że jeżeli (1) się spełnia dla n, to też się spełnia dla $n+1$.

$$1\cdot 1! + \ldots + (n+1)(n+1)! = 1! + \ldots + n\,n! + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1.$$

Z hipotezy indukcyjnej

Zatem (1) spełnia się dla $n+1$.

Z indukcji (1) jest prawdą dla dowolnego $n\in\mathbb{N}^+$

b) Nierówność Bernoulliego. $\forall x \geq -1, \forall n\in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geq 1+nx$.

1) Dla $n=0$ mamy że $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0\cdot x \Rightarrow$ Spełnia się

2) Teraz załóżmy że Nierówność spełnia się dla n i udowodnimy, że też spełnia się dla $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x.$$

Z hipotezy indukcyjnej i $x \geq -1$

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Dla $n=1$ mamy, że $1=\frac{1(1+1)}{2}=1 \Rightarrow$ równość się spełnia.
Dla $n+1$ jeżeli założymy, że (1) jest prawdą dla n:

$$1+2+3+\dots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n+2}{2}(n+1)$$

Więc, równość spełnia się dla $n+1$.

Z indukcji (1) spełnia się dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$.

(2) $$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dla $n=1$ mamy, że $1^2=\frac{1(\overset{2}{1+1})(\overset{3}{\overline{2\cdot1+1}})}{6}=1$ Więc dla $n=1$ równość jest prawdziwa.

Załóżmy, że równość jest prawdziwa dla n; wtedy dla $n+1$ wynika, że

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\left[\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right](n+1)$$

$$=\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]n+1$$

$$=\frac{2n^2+7n+6}{6}(n+1)$$

$$=\frac{2(n+2)(n+3/2)}{6}(n+1)=\frac{(n+2)(2n+3)(n+1)}{6}.$$

$2n^2+7n+6=0$

$\Downarrow$

$$n=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot6\cdot2}}{2\cdot2}$$

$$n_\pm=\frac{-7\pm1}{4} \nearrow n_+=-2$$

$$n_-=-\frac{3}{2}.$$

Ostatnie wyrażenie to (2) dla $n+1$. Więc (2) jest prawdą dla $n+1$ i z indukcji ta równość jest prawdą dla ~~dowolnego~~ ~~n~~. $n=1,2,\dots$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \cancel{n^2(n+1)^2}(1+2+3+\ldots+n)^2 \qquad (3)$$

$n=1$. $\quad 1^3 = 1^2 \Rightarrow$ ok.

~~Wk~~ Załóżmy, że (3) jest prawdą dla n i spróbujemy udowodnić, że też jest prawdą dla $n+1$:

$$A = 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 \underset{\uparrow}{=} (1+2+3+\ldots+n)^2+(n+1)^3.$$

z hipotezy indukcyjnej

~~W~~iemy, że $1+2+\ldots+n = \frac{(1+n)n}{2}$ więc

$$A = \left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2 = \frac{(1+n)^2n^2}{4}+(n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right].$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = [1+2+\ldots+n+n+1]^2.$$

Więc (3) jest prawdą dla $n+1$.

Z indukcji (3) jest prawdą dla $n=1,2,3\ldots$.

$$q^0+q^1+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q\neq 1 \qquad (4)$$

Dla $n=0$ $\quad q^0 = \frac{1-q^1}{1-q} = 1$. ok. (4) spełnia się

Dla $n+1$ jeżeli (4) jest prawdą dla n

$$q^0+q^1+\ldots+q^n+q^{n+1} \underset{\uparrow}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

z hipotezy indukcyjnej

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Zatem (4) jest prawdą dla $n+1$.

Z indukcji, (4) jest prawdą dla $n=0,1,\ldots$

Zadanie 4 Udowodnić indukcyjnie, że jeżeli $a,b \geq 0$ to

$$\left[\frac{a+b}{2}\right]^n \leq \frac{a^n+b^n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (7)$$

Dowód:

Dla $n=0$ $\quad 1=\left[\frac{a+b}{2}\right]^0 \leq \frac{a^0+b^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ $\quad$ (7) się spełnia.

Załóżmy, że (7) spełnia się dla n, wtedy

$$\left[\frac{a+b}{2}\right]^{n+1} = \left[\frac{a+b}{2}\right]^n \left[\frac{a+b}{2}\right] \leq \frac{a^n+b^n}{2}\,\frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+ab^n+ba^n}{4} = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{4} + \frac{ab^n+ba^n}{4}$$

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} - \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{4} + \frac{ab^n+ba^n}{4}$$

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} + \frac{(b-a)a^n+(a-b)b^n}{4}$$

$a-b \geq 0$ lub $b-a \geq 0$

to jest niedodatnie

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} + \frac{(b-a)(a^n-b^n)}{4} = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} + \frac{(b-a)(a-b)}{4}$$

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$$

$$\leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}. \Rightarrow \left[\frac{a+b}{2}\right]^{n+1} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}.$$

Z hipotezy indukcyjnej (7) jest prawdziwe dla $n=0,1,\ldots$