Zadanie 1 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$u_n = \frac{n}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \overset{n.o.}{=} \frac{\infty}{\infty}$$

W tym przypadku podzielimy przez n do największej potęgi.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n/n}{n/n + 1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + 1/n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \cancel{\frac{1}{n}}^{\,0}} = 1.$$

$$u_n = \frac{n^2-1}{3-n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3-n^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cancel{\frac{1}{n^2}}^{\,0}}{\cancel{\frac{3}{n^2}}_{\,0} - 1} = -1$$

$$u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n-1)^2}{n^2}}{\frac{(4n-1)(3n+2)}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2}{\left(\frac{4n-1}{n}\right)\left(\frac{3n+2}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2}{\left(4 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{2^2}{4\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{3}{n}}^{\,0} - \lim \cancel{\frac{10}{\sqrt{n}}}^{\,0}.$$

$$u_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{3n-1}\right]^3 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n-2}{n}}{\frac{3n-1}{n}}\right]^3 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right]^3$$

$$\cancel{\lim} = \left[\frac{5}{3}\right]^3.$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Rozwiążemy za pomocą twierdzenia trzech ciągów:

$$-\frac{1}{2n-1} \leq \frac{(-1)^n}{2n-1} \leq \frac{1}{2n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$-\lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{1}{2n-1}}^{\,0} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \leq \lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{1}{2n-1}}^{\,0}$$

dąży do 0   dąży do 0.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 0.$$

$$u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2-5n-10n^2}{3n+15} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2-5n-10n^2}{n^2}}{\frac{3n}{n^2}+\frac{15}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{2}{n^2}}^{\to 0} - \cancel{\frac{5}{n}}^{\to 0} - 10}{\cancel{\frac{3n}{n^2}}^{\to 0} + \cancel{\frac{15}{n^2}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$$u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2})(\sqrt{1+2n^2}+\sqrt{1+4n^2})}{n(\sqrt{1+2n^2}+\sqrt{1+4n^2})}$$ ← Aby usunąć $\infty - \infty$

Nieokr. $\frac{\infty-\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\cancel{1}+2n^2)-(\cancel{1}+4n^2)}{n(\sqrt{1+2n^2}+\sqrt{1+4n^2})} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2n^2}{n(\sqrt{1+2n^2}+\sqrt{1+4n^2})} \overset{\text{nieokr.}}{=} \frac{\infty}{\infty}$$

Usunąć $\frac{\infty}{\infty}$, Podzielić przez n^2

$$= \lim_{n\to+\infty} - \frac{2n^2/n^2}{\frac{n(\sqrt{1+2n^2}+\sqrt{1+4n^2})}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} - \frac{2}{\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n}+\frac{\sqrt{1+4n^2}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} - \frac{2}{\sqrt{\frac{2n^2+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1+4n^2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} - \frac{2}{\sqrt{2+\cancel{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+\sqrt{\cancel{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}+4}} =$$

$$= \lim - \frac{2}{\sqrt{2}+2} = - \frac{2(\sqrt{2}-2)}{2-4} = \sqrt{2}-2.$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}/n}{(3n-2)/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\cancel{\frac{4}{n^2}}^{\to 0}}}{3-\cancel{\frac{2}{n}}_{\to 0}} \to \frac{1}{3}.$$

$$u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n/n}{\frac{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8-\cancel{\frac{1}{n}}^{\to 0}-\cancel{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}}} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

a) $u_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty - \infty$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0.$$

b) $u_n = \sqrt{n^2+n}-n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}.$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty - \infty$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

c) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty - \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3n-\sqrt{9n^2+6n-15}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+6n-15}\right)}{3n+\sqrt{9n^2+6n-15}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{9n^2}-\cancel{9n^2}-6n+15}{3n+\sqrt{9n^2+6n-15}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-6n+15}{n}}{\frac{3n+\sqrt{9n^2+6n-15}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-6+\cancel{\frac{15}{n}}\to 0}{3+\sqrt{9+\cancel{\frac{6}{n}}-\cancel{\frac{15}{n^2}}}} = -\frac{6}{3+3} = -1.$$

d) $u_n = \underbrace{\sqrt[3]{n^3+4n^2}}_{A} - \underbrace{n}_{B}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt[3]{n^3+4n^2}}_{A} - \underbrace{n}_{B} = \cancel{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n}$$

$\Rightarrow \left(A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2) \Rightarrow\right) \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n = \lim \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2}\right)^3 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+4n^2}\cdot n + n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}+4n^2-\cancel{n^3}}{\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{n^3+4n^2}\right)n + n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2/n^2}{\left(\frac{\sqrt[3]{n^3+4n^2}}{n}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{n^3+4n^2}{n^3}} + 1} = \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

Zadanie 3 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

a) $u_n = \frac{53^{2n}-1}{49^n+7}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{53^{2n}-1}{49^n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{53^{2n}}{53^{2n}}}\to 1 - \cancel{\frac{1}{53^{2n}}}\to 0}{\cancel{\frac{49^n}{53^{2n}}}\to 0 + \cancel{\frac{7}{53^{2n}}}\to 0} \to 0^+ = +\infty$$

to jest dodatnie!!

b) $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\right]^{n+1} - 1\right] = -1.$$

$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad |q|<1$

c) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{3^n} - \frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \cancel{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}}{3 - \cancel{\frac{1}{3^n}}_{\to 0}} = \frac{2}{3}.$$

Zadanie 4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $u_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$ Mamy że $\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+2^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n}$ $\forall n \in N$

Z twierdzenia trzech ciągów:

$$3 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} = 3.$$

Więc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$$

b) $u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}} = \lim_{n\to+\infty} 10^{\frac{100}{n}\to 0} - 10^{-\frac{100}{n}\to 0}$

$$= 1 - 1 = 0.$$

c) $u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ skoro $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ to

$$\frac{3}{4} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}\sqrt[n]{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}\sqrt[n]{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}.$$

Zadanie 5 Niech $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1,1]$, $n \in N_+$.

Znaleźć $T_1(x)$. Posługując się tożsamością trygonometryczną

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$ pokazać, że

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\, T_n(x).$$

Mamy że $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$. Więc

$$T_2(x) = \cos(2\arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x)$$
$$= \cos^2(\arccos x) - 1 + \cos^2(\arccos x) = 2x^2 - 1.$$

Ogólnie mówiąc:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\, T_n(x)$$

$$\underbrace{\cos(\overbrace{n\arccos x}^{A} + \overbrace{\arccos x}^{B})}_{T_{n+1}} + \cos(\overbrace{n\arccos x}^{A} - \overbrace{\arccos x}^{B}) \overset{\text{tożsamość trygonometryczna}}{=}$$

$$= 2\cos A \cos B = 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x)$$
$$= 2x T_n(x).$$

Zadanie 6 Oblicz granicę ciągu określonego rekurencyjnie.

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} \sqrt{2a_n}.$$

Możemy to rozwiązać dwoma metodami:

Metoda 1

$$a_1 = \sqrt{2}$$
$$a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2}\, 2^{\frac{1}{4}}$$
$$a_3 = \sqrt{2a_2} = \sqrt{2}\, 2^{\frac{1}{4}}\, 2^{\frac{1}{8}}$$
$$a_4 = \sqrt{2a_3} = \sqrt{2}\, 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{8}} 2^{\frac{1}{6}}$$

Przez indukcję

$$a_n = 2^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$$

Więc

seria geometryczna.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right]}$$

$$= 2^{\lim_{n\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]} = 2^1 = 2.$$

Metoda 2

Z indukcji widać, że $a_1>0$ i jeżeli $a_n>0 \Rightarrow a_{n+1}>0$. Zatem $a_n>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli granica istnieje, to dla pewnego n

$$a_{n+1} \approx a_n \Leftrightarrow a_n \approx \sqrt{2a_n} \Leftrightarrow a_n^2 \approx 2a_n \approx a_n(a_n-2) \approx 0$$

$\Leftrightarrow a_n \approx 2$.

Więc jeżeli granica istnieje to jest równa 2.

Udowodnijmy, że granica ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje. Aby to zrobić udowodnimy, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i ograniczony.

a) Ograniczony $a_1<2$ i jeżeli $a_n<2 \Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2 \Rightarrow a_{n+1}<2$

przez indukcję $a_n<2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Rosnący. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}}>1$ ponieważ $a_n<2 \Rightarrow \sqrt{a_n}<\sqrt{2}$.

Więc $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę i jest równa 2, czyli $\lim_{n\to\infty} a_n=2$.

Zadanie 7 Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie

$$x_0>0 \qquad x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}.$$

Z indukcji, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg liczb dodatnich:

$$x_0>0, \qquad x_n>0 \Rightarrow x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}>0$$

Ponad to widać, że $x_{n+1}\geq\sqrt{2}$:

$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}-\sqrt{2}=\frac{x_n^2+2-2\sqrt{2}x_n}{2x_n}=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}.$$

Wówczas, x_1 może być mniejszy od $\sqrt{2}$, ale $x_n>\sqrt{2}$ $\forall n>1$.

Ponadto

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2x_n}=\frac{(\sqrt{2}-x_n)(\sqrt{2}+x_n)}{2x_n}.$$

Więc dla $n\geq 2$ mamy, że $x_n\geq\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\leq x_{n+1}\leq x_n$

Zatem $\{x_n\}_{n=2,3,..}$ jest malejący i ograniczony z dołu. Więc, ma granicę i

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

Zadanie 8. Znaleźć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+1} = \frac{6}{2a_n+1}, \qquad a_0 > 0.$$

Jeżeli istnieje granica, to dla n wystarczająco dużej wynika, że

$$a_{n+1} \simeq a_n \iff a_n \simeq \frac{6}{2a_n+1} \iff 2a_n^2 + a_n - 6 \simeq 0$$

Z tego wynika, że $a_n \simeq -2$ lub $a_n \simeq \frac{3}{2}$. Skoro $a_0 > 0$ i $a_{n+1} = \frac{6}{2a_n+1}$, to można udowodnić z indukcji, że $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Wówczas, jeżeli $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę, to granica powinna być $\frac{3}{2}$.

Do tej pory spróbowaliśmy udowodnić, że ciąg rekurencyjny jest zbieżny udowodniając, że ciąg jest monotoniczny i ograniczony. Natomiast $\{a_n\}$ nie jest monotoniczny. (proszę spróbować to sprawdzić). Natomiast, możemy coś innego zrobić. Możemy podzielić $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w dwóch ciągach: $\{p_n = a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazy parzyste i $\{o_n = a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (nie parzyste wyrazy).
Można udowodnić, że

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} b \iff (p_n \to b \wedge o_n \to b)$$

Czyli a_n dąży do b wtedy i tylko wtedy p_n i o_n dążą do b.

p_n i o_n to ciągi rekurencyjny widać że

$$p_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{6}{2a_{2n+1}+1} = \frac{6}{2\cdot\frac{6}{2a_{2n}+1}+1} = \frac{12a_{2n}+6}{13+2a_{2n}} = \frac{12p_n+6}{13+2p_n}.$$

Tak samo dla nieparzystych: $o_{n+1} = \frac{12o_n+6}{13+2o_n}$. Możemy udowodnić że takie ciągi ~~jest~~ są ograniczone

$$p_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{12p_n+6}{13+2p_n} - \frac{3}{2} = \frac{24p_n+12-39-6p_n}{2(13+2p_n)} = \frac{18p_n-27}{2(13+2p_n)}$$

$$= \frac{9}{13+2p_n}\left(p_n - \frac{3}{2}\right)$$

z tego widać, że jeżeli $p_n > \frac{3}{2} \Rightarrow p_{n+1} > \frac{3}{2}$. Przez indukcję, jeżeli $p_0 > \frac{3}{2} \Rightarrow p_n > \frac{3}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Podobnie, jeżeli $p_0 < \frac{3}{2} \Rightarrow p_n < \frac{3}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$. I tak, taki ciąg jest ograniczony.

Teraz, możemy udowodnić, że $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczne.

$$p_{n+1} - p_n = \frac{12p_n+6}{13+2p_n} - p_n = \frac{-p_n - 2p_n^2+6}{13+2p_n} = -\frac{2}{13+2p_n}\left(p_n - \frac{3}{2}\right)(p_n+2)$$

$p_n \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{3}{2}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } p_0 > \frac{3}{2} \text{ to } p_n > \frac{3}{2}\ \forall n \Rightarrow p_{n+1} < p_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ciąg malejący} \\ \text{ograniczony z dołu} \Rightarrow \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ma granicę} \Rightarrow \frac{3}{2} \\ p_0 < \frac{3}{2}, \text{ to } p_n < \frac{3}{2}\ \forall n \Rightarrow p_{n+1} > p_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ciąg rosnący.} \\ \text{Ograniczony z góry} \Rightarrow \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ma granicę} = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

<u>~~DOSKONALE~~</u> Tak samo dla $\{o_n\}$ mają taką samą ogólną postać.

$$\left.\begin{array}{l} \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{3}{2} \\ \{o_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{3}{2}}$$