Równania różniczkowe, styczna do krzywej i zastosowania pochodnych

Javier de Lucas

Zadanie 1. Wykazać, że funkcja $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0)$, gdzie a, ω, φ_0 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, spełnia równanie: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Zadanie 2. Niech $\phi(x) = f(x + vt) + g(x - vt)$, zaś $\psi(t) = f(x + vt) + g(x - vt)$, f, g są dwukrotnie różniczkowalne i $v \in \mathbb{R}$. Pokazać, że

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}(t, x) = v^2 \frac{d^2\phi}{dx^2}(t, x).$$

Podać interpretację wyrażenia $f(x + vt) + g(x - vt)$.

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność: $x^n - nx + n - 1 \geq 0$, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$ i n jest parzyste.

Zadanie 4. Pokazać, że wielomian $w_n(x) = x^n - x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, może mieć co najwyżej dwa rzeczywiste miejsca zerowe.

Rozwiązanie: Wprowadzamy dowód niewprost. Zakładamy, że wielomian $w_n(x)$ ma trzy różne pierwiastki i sprobujemy, że to wprowadza do sprzeczności. Jeżeli wielomian $w_n(x)$ ma trzy różne pierwiastki x_1, x_2, x_3, to $w_n(x_1) = w_n(x_2) = w_n(x_3)$. Załóżmy bez utrata ogólności, że $x_1 < x_2 < x_3$. Skoro $w_n(x)$ jest ciągły w $[x_1, x_3]$ i różniczkowalny w (x_1, x_3), to z twierdzienia Rolla istnieje punkt $c_1 \in (x_1, x_2)$ taki, że $w_n'(c_1) = 0$ i $c_2 \in (x_2, x_3)$ taki, że $w_n'(c_2) = 0$. Skoro $n > 3$ to oznacza, że wielomian

$$w_n'(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + 2(n-2)x^{n-3} = x^{n-3}(nx^2 - (n-1)x + 2(n-2))$$

ma jeden pierwiastek w (x_1, x_2) i drugi w (x_2, x_3). Jasny, że 0 to jeden pierwiastek w_n'. Jeżeli w_n' ma drugi pierwiastek, to jest pierwiastek wielomianu

$$P_n(x) = nx^2 - (n-1)x + 2(n-2).$$

Natomiast, mamy, że $P_n(x)$ ma pierwiastek pod warunkiem

$$\Delta_n \equiv (n-1)^2 - 8n(n-2) = -7n^2 + 14n + 1 > 0.$$

Znak Δ_n zależy od n. Mamy, że $-7n^2 + 14n + 1 = 0$ dla

$$n_\pm = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 28}}{-14} = \frac{-14 \pm \sqrt{224}}{-14} = 1 \mp 4/\sqrt{14}.$$

Widać, że $1 + 4/\sqrt{14} = 1 + \sqrt{16/14} < 1 + \sqrt{48/14} = 3$. Wielomian $P_n(x)$ tylko ma pierwiastki dla $n_- \leq n \leq n_+$. Skoro $n \geq 3$, to $n > n_+$, $\Delta_n < 0$ i $P_n(x)$ nie ma pierwiastków. To sprzeczność ponieważ z założenia, $P_n(x)$ powinno mieć conajmiej jeden pierwiastek. Z tego wynika, że $w_n(x)$ nie ma trzych pierwiastków.

$\square$

Zadanie 5. Która z liczb jest większa: e^π, czy π^e?

Zadanie 6. Znaleźć współrzędne punktu wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x$, w którym styczna jest równoległa do funkcji $g(x) = 5x$.

Zadanie 7. Znaleźć równanie stycznej do krzywej: $2x^2 - 3xy + y^2 = 4$ w punkcie $(3, 2)$.

Rozwiązanie: Wiemy, że krzywa styczna do funkcji $y = y(x)$ w punkcie (x_0, y_0) ma równanie

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0).$$

Problem polega na tym, że w tym przypadku nie znamy $y = y(x)$. Właśnie, można udowodnić, że y to nie funkcja od x ponieważ dla pewnej wartości x są różne wartości x:

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 4 \Rightarrow y = \frac{3x \pm \sqrt{9x^2 - 4(2x^2 - 4)}}{2} = \frac{3x \pm \sqrt{x^2 + 16}}{2}.$$

Więc, mamy dwie krzywe $y(x)$. Możemy taki problem rozwiązać łatwo. Wystarczy zauważyć, że

$$2x^2 - 3xy(x) + y^2(x) = 4.$$

Zatem, obliczając pochodną po x po obu stronach

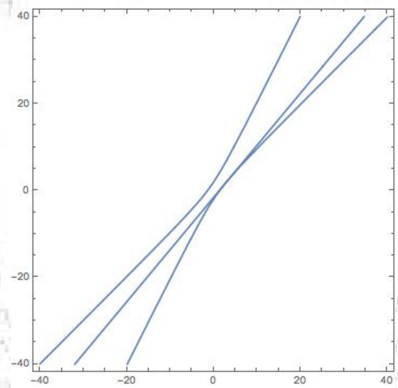
$$4x - 3y(x) - 3x\frac{dy}{dx} + 2y(x)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}.$$

Z tego wynika, że pochodna funcji $y(x)$ w punkcje $(3, 2)$ to

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}.$$

Więc, równanie stycznej do krzywej to

$$y - 2 = \frac{6}{5}(x - 3).$$



$\square$

Zadanie 8. Udowodnij, że linia $y = mx + c$ jest styczna do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jeżeli $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

Rozwiązanie: Aby rozwiązać ten problem, najpierw znajdziemy punkty elipsy (x, y) gdzie elipsa $y = y(x)$ ma takie same pochylenie, i.e dy/dx, jak krzywa $y = mx+b$, tj. m. Skoro elipsa ma wszystkie możliwe pochylenia od $-\infty$ to $+\infty$ dwa razy, to zawsze istnieją dwa takie punkty.

Szukamy punktów gdzie pochodna funkcji $y(x)$ elipsy powinno spełnić

$$\frac{dy}{dx} = m.$$

Znowu, elipsa nie pozwala nam określić $y = y(x)$ ponieważ dla każdej wartości x mamy dwie różne wartości y. Natomiast, skoro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

obliczając pochodną po obu stronach:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Więc, $dy/dx = m$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}m = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a^2}{b^2}ym.$$

Je zeli to punkt przecięcia z krzywą $y = mx + c$ to

$$y = mx + c \Rightarrow y = -\frac{a^2}{b^2} y m^2 + c \Rightarrow y \frac{b^2 + a^2 m^2}{b^2} = c \Rightarrow y = \frac{b^2 c}{b^2 + a^2 m^2}.$$

Zatem, punkt gdzie $dy/dx = m$ to

$$P \equiv \left(-\frac{a^2 c m}{b^2 + a^2 m^2}, \frac{b^2 c}{b^2 + a^2 m^2} \right).$$

Taki punkt ma spełnić rozwanie elipsy, zatem

$$\frac{1}{a^2} \left(-\frac{a^2 c m}{b^2 + a^2 m^2} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{b^2 c}{b^2 + a^2 m^2} \right)^2 = 1$$

i wtedy

$$\frac{1}{a^2} a^4 c^2 m^2 + \frac{1}{b^2} b^4 c^2 = (b^2 + a^2 m^2)^2 \Rightarrow (a^2 m^2 + b^2) c^2 = (b^2 + a^2 m^2)^2$$

i $c^2 = b^2 + a^2 m^2$. Czyli, jeżeli $c^2 = b^2 + a^2 m$, to istnieje punkt gdzie $y = mx + b$ jest styczna do elipsy. $\square$

Zadanie 9. Napisz równanie stycznej do krzywej $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x = 0$.