Pierwsze kolokwium z Matematyki I

4. listopada 2013 r.

J. de Lucas

Uwagi organizacyjne: Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce, opatrzonej imieniem i nazwiskiem własnym oraz osoby prowadzącej ćwiczenia, jak również numerem grupy ćwiczeniowej. Korzystanie z jakichkolwiek pomocy (notatek, książek, tablic matematycznych, kalkulatorów etc.) jest niedozwolone. W razie wątpliwości dotyczących treści zadań proszę zwrócić się do asystenta.

Zadanie 1. Zdefiniujmy podzbiory płaszczyzny:

$$
\begin{aligned}
W &:= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \cdot (3-y) \cdot (y - 3 + |2x-1|) < 0 \},\\
K &:= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 - 8y + 12 < 0 \},\\
A &:= W \cap K
\end{aligned}
$$

oraz

$$B := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 4x^2 + 4y^2 - 4x - 32y + 61 < 0 \}$$

Opisz i narysuj zbiór

$$H := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

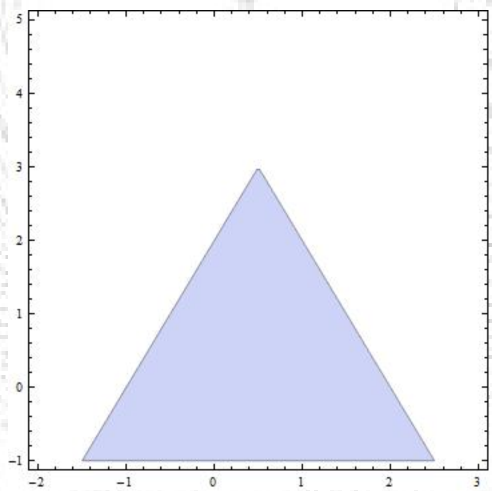
Rozwiązanie: Aby ustalić kształt podzbioru W, rozpatrujemy kiedy x, $(3-y)$ i $y - 3 + |2x-1|$ są większe, równe lub równe zeru.

Najpierw sprawdzamy, gdy $y - 3 + |2x-1|$ jest większy, mniejszy lub równy zeru. Aby to zrobić zbadamy równanie $y - 3 + |2x-1| = 0$. Widać, że

$$y = 3 - |2x-1|$$

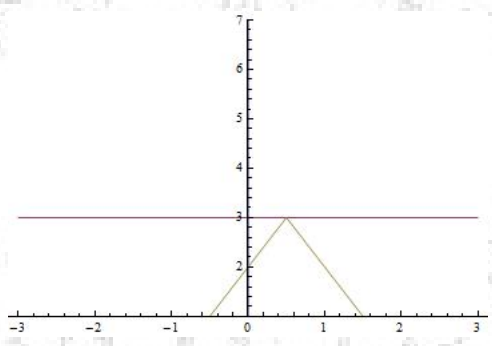
Gdy $2x > 1$, czyli $x > 1/2$, mamy, że $y = 3 - 2x + 1 = 4 - 2x$. Natomiast, gdy $2x < 1$ mamy, że $y = 3 + 2x - 1 = 2 + 2x$.

Trzeba zauważyć, że ta linia jest złożona z punktów, dla których $y-3+|2x-1|=0$. Gdy mamy punkt (x_0,y_0), który jest wyższy od punktu (x_0,y) tej linii, wtedy $y_0-3+|2x_0-1|>y-3+|2x_0-1|=0$ Natomiast, jeżeli $y_0<y$, to $y_0-3+|2x_0-1|<y-3+|2x_0-1|=0$. Korzystając z tego, zbiór $y-3+|2x-1|$ jest mniejszy lub równy zeru na obszarze

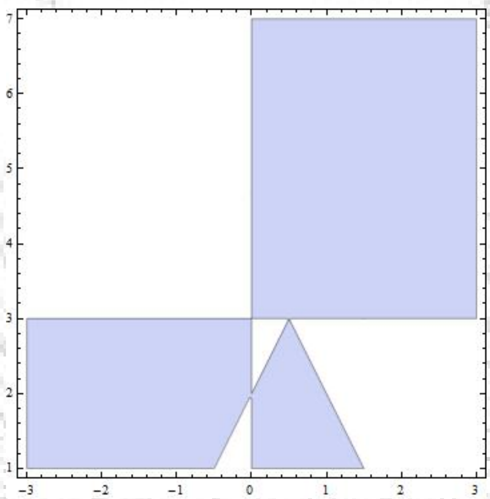


Właśnie, funkcja $y-3+|2x-1|$ jest równa zeru na brzegu tego obszaru i dodatnia na zewnątrz.

Część x jest dodatnia gdy $x>0$ i ujemna gdy $x<0$. Natomiast, $y-3$ jest dodatnia gdy $y>3$ i ujemna gdy $y<3$. Więc, na płaszczyźnie mamy następujące obszary



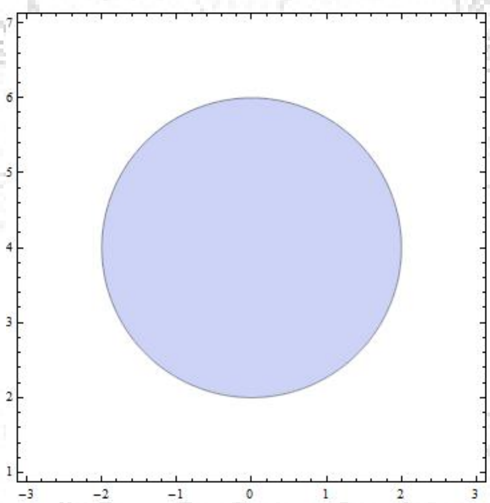
Jeżeli sprawdzamy znak każdej części x, $3-y$ i $y-3+|2x-1|$, mamy, że obszary gdzie $x(3-y)(y-3+|2-1|)<0$ to



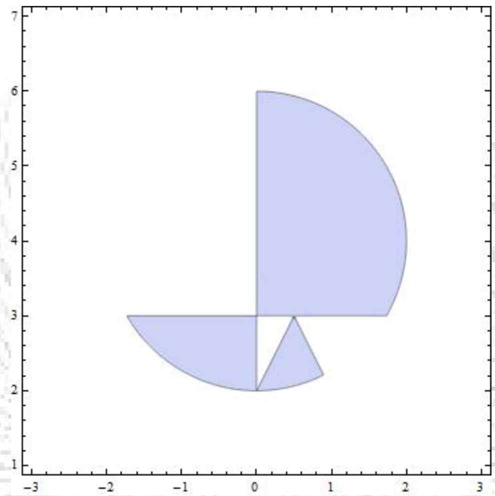
Teraz mamy, że K to zbiór punktów gdzie

$$x^2 + y^2 - 8y + 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 - 16 + 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 < 4$$

Więc, K to okrąg z promieniem 2 i środkiem w punkcie $(0, 4)$, czyli



Wówczas, zbiór A to przecięcie między K i W, czyli



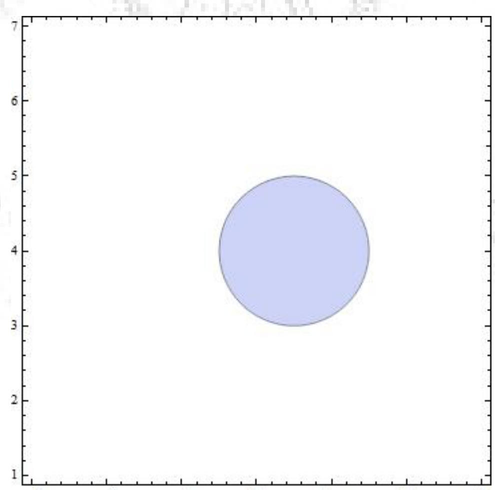
Natomiast

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 32y + 61 < 0 \Leftrightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 4(y-4)^2 - 64 + 61 < 0$$

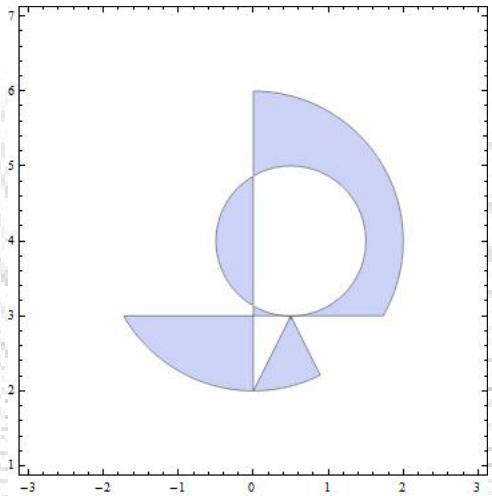
Wówczas

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 32y + 61 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-4)^2 < 1$$

i B wygląda następująco



Więc, różnica symetryczna jest zbiorem



punktów, które należą do B i nie do A lub do A i nie do B. □

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n liczba $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jest podzielna przez 133.

Rozwiązanie: Przeprowadzamy dowód przez indukcję. Dla $n = 1$, mamy, że

$$11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133.$$

Więc, $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jest podzielna przez 133 dla $n = 1$.

Teraz, zakładamy, że $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jest podzielna przez 133 i udowodnimy, że dla $n + 1$, czyli $11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1}$, jest podzielna przez 133:

$$\begin{aligned} 11^{n+2}+12^{2(n+1)-1} = 11\cdot 11^{n+1}+12^2 12^{2n-1} &= 11(11^n+12^{2n-1})-11\cdot 12^{2n-1}+12^2\cdot 12^{2n-1} \\ &= 11(11^n + 12^{2n-1}) + 133\cdot 12^{2n-1}. \end{aligned}$$

Pierwsza część, czyli $11(11^n + 12^{2n-1})$, jest podzielna przez 133 z hipotezy indukcyjnej. Druga część, czyli $133 \cdot 12^{2n-1}$ jest oczywiście podzielna przez 133. Wówczas, $11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1}$ jest podzielna przez 133.

Z hipotezy indukcyjnej, $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jest podzielny dla każdej $n \in \mathbb{N}$. □

Zadanie 3. Rozwiąż równanie

$$\log_2(4^x + 5) = \log_2(2^{x+2} + 28) - 2\,.$$

Rozwiązanie:

$$\log_2(4^x+5) = \log_2(2^{x+2}+28) - 2 \Leftrightarrow 2^{\log_2(4^x+5)} = 2^{\log_2(2^{x+2}+28)-2} \Leftrightarrow$$
$$4^x + 5 = (2^{x+2}+28)2^{-2} \Leftrightarrow 4(2^{2x}+5) = 4\cdot 2^x + 28.$$

Jeżeli zdefiniujemy $u = 2^x > 0$, to mamy, że

$$\log_2(4^x+5) = \log_2(2^{x+2}+28) - 2 \Leftrightarrow 4u^2 + 20 = 4u + 28 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0.$$

Wówczas,

$$u_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \to u_- = -1, u_+ = 2.$$

Skoro u ma być większy od zera, to $2^x = 2$, to $x = 1$. □

Zadanie 4. Rozwiąż równanie

$$\operatorname{arc\,tan}\left(2 - \tfrac{1}{2}x^2\right) + \operatorname{arc\,tan}\left(\tfrac{1}{4}x^2\right) = \tfrac{\pi}{4} \tag{0.1}$$

przy warunku $x \in [\sqrt{2}, 2]$.

Rozwiązanie: Z (0.1) mamy, że

$$\tan\left[\operatorname{arc\,tan}\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) + \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{4}x^2\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \tag{0.2}$$

Trzeba pamiętać, że rozwiązania (0.1) to podzbiór rozwiązań poprzedniego równania. Mówiąc inaczej, rozwiązania równania (0.1) to podzbiór rozwiązań poprzedniego równania (0.2). Teraz rozwiążemy (0.2) i sprawdzimy, które z jego rozwiązań są rozwiązaniami (0.1). Z (0.2) wynika, że

$$\frac{2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2}{1 - \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{4}x^2} = 1.$$

Z tego
$$\frac{2-\frac{1}{4}x^2}{1-\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{4}x^2}=1 \Leftrightarrow 2-\frac{1}{4}x^2=1-\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{4}x^2$$
i
$$1+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^4=0.$$
Rozwiązania dla $z=x^2$
$$z=\frac{-1/4\pm\sqrt{1/16+1/2}}{-1/4}=\frac{-1/4\pm 3/4}{-1/4}.$$
Więc, $z\in\{4,-2\}$. Skoro $x^2=z$ i $x\in\mathbb{R}$, to $x=\pm 2$. Wówczas, są rozwiązaniami (0.2). Teraz musimy sprawdzić które z tych rozwiązań są też rozwiązaniami równania (0.2). Skoro szukamy rozwiązań równania (0.1) dla $x\in[\sqrt{2},2]$, jedyną możliwością w przedziale $[\sqrt{2},2]$ jest $x=2$. Natomiast, jeszcze musimy sprawdzić, czy to rozwiązanie spełnia (0.1). Właśnie, mamy, że równanie się spełnia:
$$\arctan\left(2-\frac{1}{2}2^2\right)+\arctan\left(\frac{1}{4}2^2\right)=\arctan(0)+\arctan(1)=\frac{\pi}{4}.$$
Możemy udowodnić też, że równanie się spełnia drugą metodą. Widać, że dla $x\in[\sqrt{2},2]$ mamy
$$2-\frac{x^2}{2}\in[0,1],\qquad \frac{1}{4}x^2\in[0,1].$$
Więc,
$$0\le\arctan\left(2-\frac{x^2}{2}\right)\le\pi/4,\qquad 0\le\arctan(x^2/4)\le\pi/4.$$
Z tego widać, że
$$0\le\arctan\left(2-\frac{x^2}{2}\right)+\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)\le\pi/2.$$
Więc, jeżeli
$$\tan\left[\arctan\left(2-\frac{x^2}{2}\right)+\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
to
$$\arctan\left(2-\frac{x^2}{2}\right)+\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$
□

Zadanie 5. Wektory $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ i $\vec{f_3}$ mają w bazie kartezjańskiej następującą postać:

$$\vec{f_1} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f_2} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f_3} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdź, że układ wektorów $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ jest bazą, i rozłóż wektor

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

w tej bazie.
Rozwiązanie: Wektory $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ tworzą bazę gdy są liniowo niezależne i generują $\mathbb{R}^3$. Aby udowodnić, że są liniowo niezależne, musimy udowodnić, że

$$\lambda_1 \vec{f_1} + \lambda_2 \vec{f_2} + \lambda_3 \vec{f_3} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

czyli, musimy udowodnić, że układ równań liniowych postaci

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ma tylko trywialne rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aby to sprawdzić, sprowadzamy poprzedni układ do postaci macierzowej i korzystamy z metody Gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 - R_3 \to R_1]{R_3 - 2R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Z tego wynika, że $-3\lambda_3 = 0$ i $\lambda_3 = 0$. Z pierwszego wiersza wynika, że $\lambda_2 = 0$. Na końcu, z drugiego wiersza, mamy, że $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$. Więc, $\lambda_1 = 0$.

Skoro mamy trzy wektory z trzema współrzędnymi, możemy też sprawdzić, czy takie wektory są liniowo niezależne za pomocą ich wyznacznika

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2 + 2 + 12 - 2 - 8 - 3 = 3 \neq 0.$$

Ponieważ wyznacznik jest różny od zera, wektory są liniowo niezależne.

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ ma wymiar trzy, czyli, wiemy że ma jedną bazę z trzema elementami, np. baza kanoniczna

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Z tego wynika, że trzy wektory liniowo niezależne generują i tworzą bazę. Skoro $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ są liniowo niezależne, to tworzą bazę.

Skoro $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ tworzą bazę, to każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^3$, np. $\vec{x}$, można sprowadzić w tylko jeden sposób, do postaci

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3.$$

Mówi sie, że $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są współrzędnymi wektora $\vec{x}$ w bazie $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Możemy obliczyć takie współrzędne rozwiązując poprzedni układ, czyli

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Korzystamy znowu z metody Gaussa i zapiszemy taki układ w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 - R_3 \to R_1]{R_3 - 2R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

Z tego wynika, że $\lambda_3 = 2, \lambda_2 = 2$ i $\lambda_1 = 1$. Więc,

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Łatwo widać, że taki wynik jest poprawny. Więc, można powiedzieć że $\vec{x}$ ma postać

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

w bazie $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

$\square$