



ĆWICZENIA Z MATEMATYKI I



Liczby zespolone

J. de Lucas

Ćwiczenie 1. Znaleźć takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, aby zachodziły równości:

i) $a(2 + 3i) + b(4 - 5i) = 6 - 2i$,

ii) $a(4 - 3i)^2 + b(1 + i)^2 = 7 - 12i$,

iii) $a\frac{2+i}{3-i} + b\left(\frac{4-i}{1-3i}\right)^2 = 1 + i$,

iv) $\frac{2a-3i}{5-3i} + \frac{3b+2i}{3-5i} = 0$.

Ćwiczenie 2. Rozwiązać równania:

1. $z^2 - 3z + 3 + i = 0$,

2. $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$,

3. $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$,

4. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$,

5. $z^2 - 2z - 2i + 1 = 0$.

Ćwiczenie 3. Uprościć następujące wyrażenia:

1. $(1 + i)^{12}$,

2. $(1 + i\sqrt{3})^{15}$,

3. $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{1996}$,

4. $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Ćwiczenie 4. Obliczyć pierwiastki 3-go stopnia z następujących liczb zespolonych: a) 1, b) -1 , c) $1 + i$, d) $1 - i$, e) $-i$, f) $2i - 5$.



ĆWICZENIA Z MATEMATYKI I



Ćwiczenie 5. Rozwiąż równania: a) $|z| - z = 1$, b) $|z| + z = 2 + i$, c) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$.

Ćwiczenie 6. Dowieść tożsamości: a) $|1 + z_1 \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$, b) $\frac{|1 - z^2|^2 - |z - \bar{z}|^2}{|1 + z^2|^2 + |z - \bar{z}|^2} = \left(\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}\right)^2$.

Ćwiczenie 7. Wykazać, że jeżeli

$$w = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

gdzie $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, to

$$\frac{1 - |z|^2}{z - \bar{z}} = \frac{w - \bar{w}}{|w^2 - 1| - |w^2| + 1} = \frac{(w + 1)|w - 1| + (w - 1)|w + 1|}{(w + 1)|w - 1| - (w - 1)|w + 1|}.$$