Pochodne

J. de Lucas

Ćwiczenie 1. Oblicyć pochodne następujących funkcji:

1. $f(x) = \sin\frac{x}{1-x}\cos\frac{x}{1-x}$
2. $f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}$
3. $f(x) = x\sin e^x$
4. $f(x) = \tan\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$
5. $f(x) = \arctan x$
6. $f(x) = \arcsin x$
7. $f(x) = \arccos x^2$
8. $f(x) = \frac{\arccos^2 x - 1}{\arccos x + 1}$
9. $f(x) = x^2 + \sin x$
10. $f(x) = e^{-x^2}$
11. $f(x) = e^{\sin x\cos x}$
12. $f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)$
13. $f(x) = a(x^4 + \ln x + e^{x^2+2x+4})$
14. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} + e^x\sqrt{x} + e^x 2x$
15. $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{\cos x}$
16. $f(x) = \frac{x\ln x + 3xe^{2x}}{x\ln x}$
17. $f(x) = \sinh\frac{1+x}{1-x}$
18. $f(x) = \tanh\frac{1+x}{1-x}$
19. $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x+x^2}$

Rozwiązanie:

1. $f'(x) = \frac{\cos(\frac{2x}{x-1})}{(x-1)^2}$
2. $f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 4x + 1 + \frac{1}{x^2}$
3. $f'(x) = \sin e^x + x \cos e^x$
4. $f'(x) = \frac{2\sec^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$
5. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
6. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
8. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $f'(x) = 2x + \cos x$
10. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
11. $f'(x) = \cos 2x e^{\sin x \cos x}$
12. $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(x-1)^2}$
13. $f'(x) = a\left(4x^3 + 2e^{x(x+2)+4}(x+1) + \frac{1}{x}\right)$
14. $f'(x) = \frac{e^x\left(x\left(4x^{3/2}+2x+4\sqrt{x}+3\right)-1\right)}{2x^{3/2}}$
15. $f'(x) = \sec(x)(x(x\tan(x)+2)+\sec(x))$
16. $f'(x) = \frac{3e^{2x}(2x\log(x)-1)}{x\log^2(x)}$
17. $f'(x) = \frac{2\cosh\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}{(x-1)^2}$
18. $f'(x) = \frac{2\mathrm{sech}^2\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}{(x-1)^2}$
19. $f'(x) = -1$

$\square$

Ćwiczenie 2. Oblicz prostą styczną i prostopadłą do funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ w punkcie $(0, 2)$.

Rozwiązanie: Prosta styczna do funkcji $f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$(y - f(x_0)) = m_s(x - x_0),$$

gdzie m_s to pochylenia tej krzywej. Skoro prosta ma być styczna do $f(x)$ w $(0, f(0))$, liczba m_s ma być pochodną tej krywej w punkcie $2 = f(0)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow m_s = f'(0) = 3.$$

Więc, równanie prostej stycznej będzie

$$y - 2 = 3x.$$

Też można przedstawić równanie takiej krzywy w postaci

$$y = 3x + 2.$$

Dwa kąty α, β są prostopadły wtedy i tylko wtedy

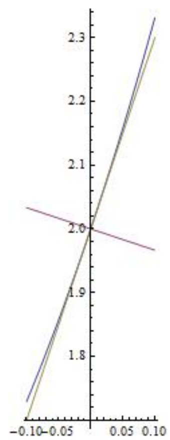
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Więc, jeżeli prosta styczna do $f(x)$ w punkcie $(0, f(0))$ ma pochylenia 3, to prosta prostopadła do krzywej $f(x)$ w tym punkcie ma pochylenia

$$m_p = -\frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{3}.$$

Więc, równanie tej prostej wygląda następująco

$$y - f(x_0) = m_p(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{3}x$$



□

Ćwiczenie 3. Oblicz prostą styczną i prostopadłą do funkcji $f(x) = \log(1+x) + \sqrt{x+5}$ w punkcie $(0,0)$.

Ćwiczenie 4. Oblicz $d^5 f/dx^5$ gdzie $f = \frac{1+x}{1-x^2}$.