Kilka dodatkowych rozwiązań

J. de Lucas

Ćwiczenie 1. Rozwiąż nierówności

$$a)\ \log_2(x+1) > 3, \qquad b)\ \log_{\frac{1}{4}}|x-3| < -2, \qquad c)\ \log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1.$$

Ćwiczenie 2. Rozwiąż równania

$$a)\ \log\left(\frac{1}{2}+x\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log x, \qquad b)\ \log_4[2\log_3[1+\log_2[1+\log_2 x]]] = \frac{1}{2}.$$

Ćwiczenie 3. Rozwiąż równania

$$a)\ 3^{5x-8} = 27^{x-3}, \qquad b)\ 7^{x-4} = (\sqrt[3]{7})^{2-3x}, \qquad c)\ 6^{x-5}\cdot 36^{2x+2} = 36.$$

Ćwiczenie 4. Rozwiąż nierówności

$$a)\ \frac{1}{2^x-1} < \frac{1}{1-2^{x-1}}, \qquad b)\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-x+1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{x^2}, \qquad c)\ 2^{2|x+1|} \geq \frac{1}{81}.$$

Rozwiązanie:

Część a) Nierówność ma sens kiedy $x \notin \{0,1\}$. Możemy zdefiniować $u = 2^{x-1}$ i pamiętamy, że zawsze $u > 0$. Wtedy

$$\frac{1}{2^x-1} < \frac{1}{1-2^{x-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2u-1} < \frac{1}{1-u} \Leftrightarrow \frac{1}{2u-1} - \frac{1}{1-u} < 0 \Leftrightarrow \frac{1-u-2u+1}{(2u-1)(1-u)} < 0$$

i

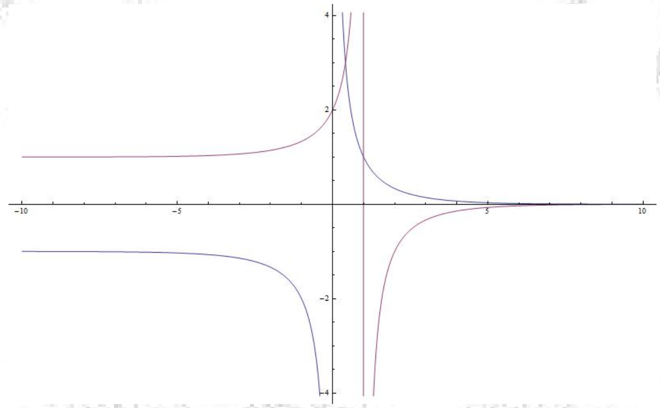
$$\frac{2-3u}{(2u-1)(1-u)} < 0. \tag{4.1}$$

Mianownik jest dodatni dla $u < 2/3$ i ujemny dla $u > 2/3$. Natomiast, $2u-1 > 0$ dla $u > 1/2$ i ujemny $u < 1/2$ i $1-u$ jest dodatnie dla $u < 1$ i ujemny dla $u > 1$. Więc, prawa strona (4.1) jest ujemna dla

$$u \in (2/3, 1) \cup (0, 1/2).$$

Wówczas, a) jest się spełnia

$$x \in (\log_2 2/3 + 1, 1) \cup (-\infty, 0).$$



Część b) Nierówność jest dobrze zdefiniowana dla każdej x. Mamy, że

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-x+1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{x^2} \Leftrightarrow 5^{x-1} \leq 5^{-2x^2} \Leftrightarrow x-1 \leq -2x^2 \Leftrightarrow x-1+2x^2 \leq 0.$$

Ostatnie wielomian ma pierwiastki

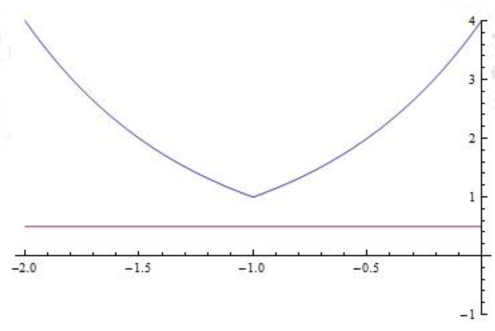
$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{-1\pm 3}{2}$$

czyli $x=-2$ i $x=1$. Skoro współczynnik x^2 jest 2 ta parabola ma ramione do góry i jest niedodatnia dla $x \in [-2,1]$. To rozwiązanie naszej nierówności.

Część c) Nierówność jest dobrze zdefiniowana dla każdej x.

$$2^{2|x+1|} \geq \frac{1}{81} \Leftrightarrow \log_2 2^{2|x+1|} \geq \log_2 3^{-4} \Leftrightarrow 2|x+1| \geq -4\log_2 3 \Leftrightarrow |x+1| \geq -2\log_2 3$$

Skoro $\log_2 3 > 1$, to $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^{2|x+1|} \geq \frac{1}{81}$.



□

Ćwiczenie 5. Rozłóż wielomian na czynniki liniowe

$$a)\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad b)\ x^3 - 5x^2 - 17x + 21, \qquad c)\ x^4 - 10x^2 + 1.$$

Ćwiczenie 6. Rozwiąż nierówności

$$a)\ \left|\frac{2x-4}{x+1}\right| \le 2, \qquad b)\ \frac{x+3}{x+1} + \frac{8}{x-5} < \frac{x-13}{x^2-4x-5}.$$

Ćwiczenie 7. Rozwiąż

$$a) z^2 + (4-2i)z + (7-4i) = 0 \qquad b)\ z^2 + z + (3-15i) = 0.$$