Teoria miary i całki 2012/2013

Seria V, 7 IV 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dany podzbiór $E \in \mathfrak{M}_L$ taki, że $\mu_L(E) < \infty$, zdefiniuje się funkcja ciągła $\varphi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci

$$\varphi_E(x) = \mu_L(E \cap (-\infty, x]), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wykaż, że (a) φ_E jest funkcją rosnącą, (b) $\lim_{x\to-\infty} \varphi_E(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} \varphi_E(x) = \mu_L(E)$, (c) $\varphi_E(x)$ spełnia właściwość Lipschitz'a, tj.

$$|\varphi_E(x') - \varphi_E(x'')| \leqslant |x' - x''|, \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

(d) φ_E jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 2. Niech $E \in \mathfrak{M}_L$, gdzie $\mu_L(E) = \infty$, pokaż, że dla każdego $\lambda \in [0, \infty)$ istnieje podzbiór E_λ zbioru E taki, że $E_\lambda \in \mathfrak{M}_L$ i $\mu_L(E_\lambda) = \lambda$.

Zadanie 3. Niech $E \subset \mathbb{R}$ i $\mu_L^*(E) = 0$. Wykaż, że E^c jest gęstym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Dla $E \subset \mathbb{R}$, zdefiniujemy $-E$, tzw refleksję E ze względu na źródło, postaci $-E = \{y \in \mathbb{R} : y = -x \text{ dla pewnego } x \in E\}$. (a) Wykaż, że $\mu_L^*(-E) = \mu_L^*(E)$. (b) Wyznaczyć, że jeżeli $E \in \mathfrak{M}_L$, to $-E \in \mathfrak{M}_L$ i $\mu_L(-E) = \mu_L(E)$.

Zadanie 5. Dla $E \subset \mathbb{R}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, zdefiniujemy αE, tzw dylatację E przez α, postaci $\alpha E = \{y \in \mathbb{R} : y = \alpha x, \text{dla pewnego } x \in E\}$. (a) Wykaż, że $\mu_L^*(\alpha E) = |\alpha|\mu_L^*(E)$. (b) Wykaż, że $E \in \mathfrak{M}_L$, to $\alpha E \in \mathfrak{M}_L$ i $\mu_L(\alpha E) = |\alpha|\mu_L(E)$.

Zadanie 6. Dana mierzalna przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\mathbb{R}, \mu_L)$, wykaż, że jeżeli $E \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ i $t \in \mathbb{R}$, to $E + t \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ i $\mu_L(E + t) = \mu_L(E)$ i $\alpha E \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ i $\mu_L(\alpha E) = |\alpha|\mu_L(E)$.

Zadanie 7. Dana funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ taka, że $|f'(x)| < M$ dla $x \in (a, b)$ dla $M \geqslant 0$. Wykaż, że dla każdego $E \subset (a, b)$ mamy, że $\mu_L^*(E) \leqslant M\mu_L^*(E)$.