5 Cwiczenia

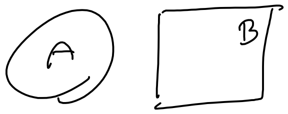
3 listopada 2015
15:02

1. Liczenie częściowego śladu po pierwszym podukładzie

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} \rho^{00}_{00} & \rho^{00}_{01} & \dots & \\ \rho^{01}_{00} & \rho^{01}_{01} & & \\ \vdots & & \rho^{10}_{10} & \rho^{10}_{11} \\ \vdots & & \rho^{11}_{10} & \rho^{11}_{11} \end{bmatrix} \qquad \rho_B = \mathrm{Tr}_A \, \rho_{AB} = \begin{bmatrix} \rho^{00}_{00} + \rho^{10}_{10} & \rho^{00}_{01} + \rho^{10}_{11} \\ \rho^{01}_{00} + \rho^{11}_{10} & \rho^{01}_{01} + \rho^{11}_{11} \end{bmatrix}$$

2. Dekoherencja

Rozważmy układ i otoczenie jako dwa podukłady kwantowe



Dekoherencja w wyniku oddziaływania B z A

$i = 0, 1$

$$|i\rangle_A \otimes |0\rangle_B \xrightarrow{t} |i\rangle_A \otimes |\psi_i^t\rangle$$

↑ stan początkowy urządzenia pomiarowego

Przy czym
$$|\psi_0^t\rangle = |0\rangle$$
$$|\psi_1^t\rangle = e^{-t}|0\rangle + \sqrt{1-e^{-2t}}\,|1\rangle$$

{ np. dośw. z dwiema szczelinami, gdzie t czas oddziaływania z czujnikiem, który ...

Czy jest unitarne? Formalnie trzeba by drugą postać określić / uzupełnić o:

$$|i\rangle \otimes |1\rangle \xrightarrow{t} |i\rangle \otimes |\varphi_i^t\rangle$$

$$|\varphi_0^t\rangle = |1\rangle$$
$$|\varphi_1^t\rangle = \sqrt{1-e^{-2t}}\,|0\rangle - e^{-t}|1\rangle$$

Rozważmy teraz stan początkowy:

$$|\Psi(0)\rangle_{AB} = |\psi\rangle \otimes |0\rangle, \quad \text{gdzie } |\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

Jego ewolucja

$$|\Psi(t)\rangle_{AB} = a\,|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle\left(e^{-t}|0\rangle + \sqrt{1-e^{-2t}}\,|1\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle_{AB} = a\ |0\rangle|0\rangle + b|1\rangle\left(e^{-t}|0\rangle + \sqrt{1-e^{-2t}}\,|1\rangle\right)$$

Obliczmy

$$\rho_A(t) = \mathrm{Tr}_B\, |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| =$$

$$= \mathrm{Tr}_B \left[\begin{array}{cc|cc} |a|^2 & 0 & ab^* e^{-t} & ab^*\sqrt{1-e^{-2t}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline ba^* e^{-t} & 0 & |b|^2 e^{-2t} & \\ ba^*\sqrt{1-e^{-2t}} & 0 & & |b|^2(1-e^{-2t}) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} |a|^2 & ab^* e^{-t} \\ ba^* e^{-t} & |b|^2 \end{bmatrix}$$

Z czasem wyrazy pozadiagonalne giną i w granicy $t \to \infty$ mamy $\begin{bmatrix} |a|^2 & \\ & |b|^2 \end{bmatrix} = |a|^2 |0\rangle\langle 0| + |b|^2 |1\rangle\langle 1|$

Zniszczona została koherencja kwantowa, mamy mieszaninę a nie superpozycję.

3. Puryfikacja

Niech ρ macierz gęstości (np. qubitu). Znaleźć ogólną receptę na napisanie stanu czystego dwóch podukładów tak, że ρ będzie zredukowaną macierzą gęstości jednego z nich

np.

$$\rho = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \qquad |\psi\rangle = \sqrt{p}\,|0\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}\,|1\rangle|1\rangle$$

ogólnie:

$$\rho = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |e_i\rangle \otimes |i\rangle$$

4. Sprawdzić, że w protokole teleportacji stan B jest $\frac{1}{2}\mathbb{1}$ przy braku wiedzy o wyniku pomiaru A

B ma 4 stany z $p = \frac{1}{4}$

$a|0\rangle + b|1\rangle = |b_0\rangle$

$a|0\rangle - b|1\rangle = |b_1\rangle \qquad \frac{1}{4}\sum_i |b_i\rangle\langle b_i| = \frac{1}{2}\mathbb{1}$

$a|0\rangle - b|1\rangle = |b_1\rangle$ $\qquad \frac{1}{4}\sum_i |b_i\rangle\langle b_i| = \frac{1}{2}I$

$a|1\rangle + b|0\rangle = |b_2\rangle$

$a|1\rangle - b|0\rangle = |b_3\rangle$

5. Ent swapping

$$|\psi_-\rangle_{12} \otimes |\psi_-\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Sprawdzić że:

$$|\psi_-\rangle \otimes |\psi_-\rangle = \frac{1}{2}\Big(|\psi_+\rangle_{14} \otimes |\psi_+\rangle_{23} - |\psi^-\rangle|\psi^-\rangle - |\varphi^+\rangle|\varphi^+\rangle + |\varphi^-\rangle|\varphi^-\rangle\Big)$$

Czyli mierząc cząstki 23 Marty przesyła informację do 1 co ma zrobić żeby mieć $|\psi^-\rangle$!