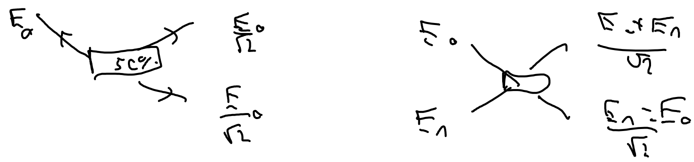
2 Rozróżnialność

11 października 2015
23:05

Płytka światłodzieląca



$$BS = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E_0' \\ E_1' \end{pmatrix} = BS \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix}$$

Ogólnie: $BS = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} r & t \\ -t^* & r \end{bmatrix}$, $\quad |t|^2 + |r|^2 = 1$, $\quad T + R = 1$

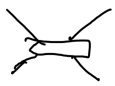
Pojedynczy foton ~ qubit dwuścieżkowy

$$|0\rangle \to r|0\rangle - t^*|1\rangle$$

pomiar w bazie $|0\rangle, |1\rangle$

jak mierzyć w innej bazie ....

Płytka światłodzieląca zależna od polaryzacji



$$BS_{\leftrightarrow} = \begin{bmatrix} r_{\leftrightarrow} & t_{\leftrightarrow} \\ -t^*_{\leftrightarrow} & r_{\leftrightarrow} \end{bmatrix}$$

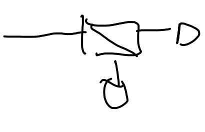
$$|\psi\rangle = \psi_{\leftrightarrow 0}|0\leftrightarrow\rangle + \psi_{\leftrightarrow 1}|1\leftrightarrow\rangle$$

Możemy mieć płytkę która robi inne transf. w zależności od polaryzacji $BS_{\updownarrow} \neq BS_{\leftrightarrow}$

$$|\psi\rangle = \psi_{\leftrightarrow 0}|\leftrightarrow, 0\rangle + \psi_{\leftrightarrow 1}|\leftrightarrow, 1\rangle + \psi_{\updownarrow 0}|\updownarrow, 0\rangle + \psi_{\updownarrow 1}|\updownarrow, 1\rangle$$

$$\to \qquad B = \begin{bmatrix} BS_{\leftrightarrow} & \\ & BS_{\updownarrow} \end{bmatrix}$$

Przykład PBS:



$$BS_{\leftrightarrow} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BS_{\updownarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pomiary i rozróżnialność stanów kwantowych

Przypomnijmy polaryzator :- $|\leftrightarrow\rangle$, $|\updownarrow\rangle$ - było pomiarowane:

W praktyce płytki PBS

$$p_\leftrightarrow = |\langle\leftrightarrow|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow|\psi\rangle = \langle\psi|P_\leftrightarrow|\psi\rangle$$

$$p_\updownarrow = \qquad\qquad = \langle\psi|P_\updownarrow|\psi\rangle$$

pomiar rzutowy. $P_\updownarrow + P_\leftrightarrow = \mathbb{1}$

Ogólnie: pomiar rzutowy: $\sum_i P_i = \mathbb{1}$ $\quad P_i^2 = P_i$

Pomiar obserwabli: A - op. hermitowski

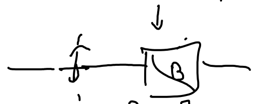
$$A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i| \qquad p_i = |\langle\psi|i\rangle|^2 = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$$

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i a_i = \langle\psi|\sum_i a_i|i\rangle\langle i|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

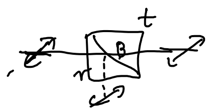
Taki opis pomiaru nie zawsze wystarczający

Przykład

płytka pod kątem Brewstera



$BS_\updownarrow = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



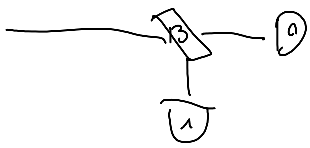
$|\psi\rangle = \psi_\leftrightarrow|\leftrightarrow\rangle + \psi_\updownarrow|\updownarrow\rangle$

$|t|^2 + |r|^2 = 1$

$BS_\leftrightarrow = \begin{bmatrix} t & r \\ -r & t \end{bmatrix}$

$$|\psi\rangle = \psi_\leftrightarrow|\leftrightarrow 0\rangle + \psi_\updownarrow|\updownarrow 0\rangle$$

$$\to \psi_\leftrightarrow(t|\leftrightarrow 0\rangle - r|\leftrightarrow 1\rangle) + \psi_\updownarrow|\updownarrow, 0\rangle$$



$$p_0 = \overbrace{|\psi_\updownarrow|^2}^{p_{0\updownarrow}} + \overbrace{(t\psi_\leftrightarrow)^2}^{p_{0\leftrightarrow}}$$

$$p_1 = |\psi_\leftrightarrow r|^2$$

$$M_0 = |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow| + |t|^2|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |t|^2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-|t|^2 \end{bmatrix}$$

$M_0 + M_1 = \mathbb{1}$ ale już nie są rzutowe

Pomiary uogólnione (POVM)

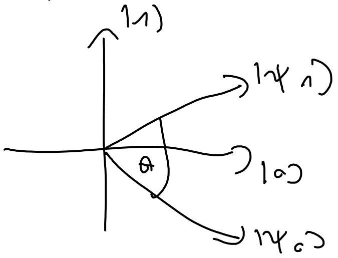
$$\sum_i M_i = \mathbb{1} \qquad M_i \geq 0 \qquad p_i = \langle\psi|M_i|\psi\rangle$$

(dla każdego zestawu da się znaleźć pomiar rzutowy) w większej przestrzeni — dowód później ...

Minimum-error rozróżnianie

Dwa stany $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$

Jaka jest najmniejsza prawd. błędu przy rozróżnianiu ich



$$|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \qquad |\psi_0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$M_0 + M_1 = \mathbb{1} \qquad M_0 \geq 0,\ M_1 \geq 0$$

Średni błąd:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\langle\psi_0|M_1|\psi_0\rangle + \langle\psi_1|M_0|\psi_1\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Tr}\left(\left(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\right) M_1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Tr}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}}_{=\ \sin\theta\,\sigma_x} M_1\right)\right)$$

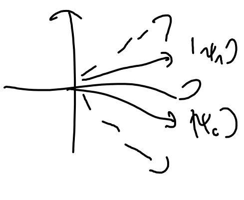
$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right)$$

Maksimum gdy $M_1 = |+\rangle\langle+|$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \sin\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|^2}\right)}$$

Nie da się lepiej rozróżnić stanów kwantowych

Interpretacja: jaki to pomiar?



Rozróżnianie jednoznaczne (unambiguous)

Wiemy, że nie da się rozróżnić nieortogonalnych stanów kw. idealnie bo wyprowadziliśmy wzór na minimum error i wyszło > 0 ale...

Niech $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ dwa st. nieortogonalne.

Chcemy rozróżnić bezbłędnie, ale dopuszczamy możliwość, że czasem powstrzymujemy się od zgadywania:

Bez utraty ogólności:

$$|\psi_0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$
$$|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Pomiar Π_0 − jesteśmy pewni że 0

Π_1 − —||— 1

$\Pi_?$ − nie wiemy

$$0 \le \lambda \le 1$$

$$\Pi_0 = \lambda \cdot |\psi_1^{\perp}\rangle\langle\psi_1^{\perp}| \quad , \quad |\psi_1^{\perp}\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\Pi_1 = \lambda\, |\psi_0^{\perp}\rangle\langle\psi_0^{\perp}| \quad |\psi_0^{\perp}\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\Pi_? = 1 - \Pi_0 - \Pi_1$$

$$\Pi_? = 1 - \lambda \begin{bmatrix} 2\sin^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda(1-\cos\theta) & 0 \\ 0 & 1-\lambda(1+\cos\theta) \end{bmatrix}$$

Czyli $\lambda \le \frac{1}{1+|\cos\theta|}$, jeśli $\lambda = \frac{1}{1+\cos\theta}$

Wtedy: $\Pi_? = \begin{bmatrix} \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Prawdop. że ?: $p_? = \cos^2\frac{\theta}{2}\, \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta} = |\cos\theta| = |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|$

To mamy rozdzielić na N liniowo niezależnych stanów $|\psi_i\rangle$,

Bierzemy $|\psi_i^\perp\rangle$ t. że $\langle\psi_i^\perp|\psi_j\rangle = 0 \quad \forall_{j\neq i}$

i konstruujemy $\Pi_i = \lambda_i |\psi_i^\perp\rangle\langle\psi_i^\perp|$

Następnie uzupełniamy $\Pi_? = \mathbb{1} - \sum_i \Pi_i$

i szukamy takich $\{\lambda_i\}$ aby

$\min_{\Pi_? \geq 0} \sum_i \mathrm{Tr}\left(|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \Pi_?\right)$ było jak najmniejsze