5 Teleportacja

1 listopada 2015
22:50

1. Zredukowana macierz gęstości

Wiemy że macierz gęstości używamy gdy mamy niepełną informację o układzie:

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \left(\text{stan } |\psi_i\rangle \text{ z prawdopodobieństwem } w_i\right)$$

np. jeśli $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle = \begin{bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{bmatrix}$ (qubit)

to ogólnie $\rho = \sum_{i,j=0}^{1} \rho^i_j |i\rangle\langle j| = \begin{bmatrix}\rho^0_0 & \rho^0_1\\ \rho^1_0 & \rho^1_1\end{bmatrix}$

I prawdopodobieństwa pomiarów liczymy

$$p_k = Tr(\rho M_k)$$

• Rozważmy teraz dwa podukłady:

A B

Baza w A $|0\rangle, |1\rangle$ ($|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$) Baza w B $|0\rangle, |1\rangle$

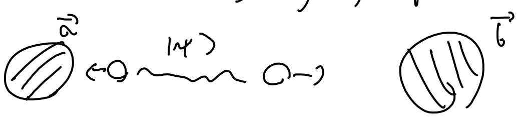
Ogólny stan czysty $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i_A=0}^{1}\sum_{i_B=0}^{1} \psi_{i_A i_B} |i_A\rangle\otimes|i_B\rangle = \begin{bmatrix}\psi_{00}\\ \psi_{01}\\ \psi_{10}\\ \psi_{11}\end{bmatrix}$

Ogólny stan mieszany:

$$\rho_{AB} = \sum_{\substack{i_A, j_A\\ i_B, j_B}} \rho^{i_A i_B}_{j_A j_B} |i_A\rangle\langle j_A| \otimes |i_B\rangle\langle j_B| =$$

$$= \begin{bmatrix}\rho^{00}_{00} & \rho^{00}_{01} & \rho^{00}_{10} & \rho^{00}_{11}\\ \rho^{01}_{00} & \rho^{01}_{01} & \rho^{01}_{10} & \rho^{01}_{11}\\ \rho^{10}_{00} & \rho^{10}_{01} & \rho^{10}_{10} & \rho^{10}_{11}\\ \rho^{11}_{00} & \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} & \rho^{11}_{11}\end{bmatrix}$$

• Pomiary lokalne: A wykonuje pomiar lokalny ($\{M^A_k\}$)
B wykonuje pomiar lokalny ($\{M^B_l\}$)



Wiemy że jeśli 2 fotony są mierzone w dwóch bazach ($\pm\vec a$), ($\pm\vec b$) to prawdop.

przejścia $= p(\vec a, \vec b) = |\langle\psi|(|\vec a\rangle\otimes|\vec b\rangle)|^2$

Piszac inaczej:

$p(\vec{a},\vec{b}) = \langle\psi| \ |\vec{a}\rangle\otimes|\vec{b}\rangle \ \langle\vec{a}|\otimes\langle\vec{b}| \ |\psi\rangle =$

$= \langle\psi| \big(|\vec{a}\rangle\langle\vec{a}| \otimes |\vec{b}\rangle\langle\vec{b}|_b\big) |\psi\rangle =$

$= Tr\big(|\psi\rangle\langle\psi| \ \ |\vec{a}\rangle\langle\vec{a}| \otimes |\vec{b}\rangle\langle\vec{b}| \big)$

Czyli ogólnie prawdopodobieństwo że A wyjdzie k a B wyjdzie l

$$p_{kl} = Tr\big(\rho_{AB} \ \ M_k^A \otimes M_l^B\big)$$

Łatwo zauważyć że jeśli $\rho_{AB} = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$

$p_{kl} = \langle\psi_A|M_k^A|\psi_A\rangle \cdot \langle\psi_B|M_l^B|\psi_B\rangle = p_k \cdot p_l$

Zdefiniujmy: $|\vec{b}\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$

$|\psi_A(\vec{b})\rangle = {}_B\langle\vec{b}| \ |\Psi\rangle_{AB} = {}_B\langle\vec{b}| \sum_{i_A i_B} \psi_{i_A i_B} \ |i_A\rangle\otimes|i_B\rangle =$

$= \sum_{i_A} \Big(\sum_{i_B} \psi_{i_A, i_B} \ b_{i_B}^* \Big) |i_A\rangle$

Można traktować ten stan jako warunkowy stan A

jako warunkowy stan A jeśli B zmierzono w stanie $|\vec{b}\rangle$

Bo:

$p(\vec{a},\vec{b}) = \big|\langle\vec{a}|\psi_A(\vec{b})\rangle\big|^2$ ok.

Remote state preparation

- Opis podukładu.
  Załóżmy że posiadamy A i nie mamy dostępu do cząstki B. Jak opiszemy stan cząstki A?

  Stan = informacja pozwalająca liczyć prawdopodobieństwa wyników pomiarowych

  Skoro nie mamy dostępu do B to

Skoro nie mamy dostępu do B to możemy poznać jedynie wyniki pomiarów na A. Jeśli nawet ktoś coś zmienił na B my nie znamy tych wyników!

Innymi słowy mam dostępne są tylko

$$p_k = \sum_l p_{kl} \quad \Big\} \text{ prawdopodobieństwa marginalne}$$

$$p_k = \sum_l \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB}\, M_k^A \otimes M_l^B\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(\rho_{AB}\, M_k^A \otimes \underbrace{\sum M_l^B}_{\mathbb{1}}\Big) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB}\, M_k^A \otimes \mathbb{1}_B\right) =$$

$$= \sum_{i_A, i_B} \langle i_A| \otimes \langle i_B|\, \rho_{AB}\, M_k^A \otimes \mathbb{1}_B\, |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle =$$

$$= \sum_{i_A i_B} \langle i_A| \otimes \langle i_B|\, \rho_{AB} \cdot M_k^A \otimes \mathbb{1}\, |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$$

$$= \sum_{i_A} \langle i_A| \Big(\underbrace{\sum_{i_B} \langle i_B|\rho_{AB}|i_B\rangle}_{\rho_A} \cdot M_k^A \Big) |i_A\rangle =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_A M_k^A\right)$$

$$\rho_A = \sum_{i_B} \langle i_B|\rho_{AB}|i_B\rangle = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})$$

częściowy ślad

zredukowana macierz gęstości.

Reprezentuje wszystko to co mogę dowiedzieć się lokalnie.

Jak liczyć częściowy ślad

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} \rho^{00}_{00} & \rho^{00}_{01} & \rho^{00}_{10} & \rho^{00}_{11} \\ \rho^{01}_{00} & \rho^{01}_{01} & \rho^{01}_{10} & \rho^{01}_{11} \\ \rho^{10}_{00} & \rho^{10}_{01} & \rho^{10}_{10} & \rho^{10}_{11} \\ \rho^{11}_{00} & \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} & \rho^{11}_{11} \end{bmatrix}$$

$$\rho_A = \left[\begin{array}{c|c} \rho^{00}_{00} + \rho^{01}_{01} & \rho^{00}_{10} + \rho^{01}_{11} \\ \hline \rho^{10}_{00} + \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} + \rho^{11}_{11} \end{array}\right]$$

Zauważmy uwagę, że S_A nie zależy od rodzaju pomiaru jaki mógłby wykonać B

Mamy $\sum_i M_i^B = \mathbb{1}$. (W szczególności $M^B = \mathbb{1}$, brak pomiaru)

Czyli to jaki zdecydował się wykonywać pomiar B np. M_i^B czy $M_i^{B'}$ nie wpływa na prawdopodobieństwo wyników A.

(Chociaż dla konkretnego wyniku pomiaru B stan który wg B znajduje się u A zależy od tego wyniku)

Przykład

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

Obliczmy S_A:

$$|\psi^-\rangle\langle\psi^-| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 0\end{bmatrix} \qquad S_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

stan max mieszany (zdepolaryzowany)

Stan całości całkowicie znany, stan podukładu nieznany zupełnie - czegoś takiego nie ma klasycznie

Przykład: Wyjątkowe własności singletu

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle|\updownarrow\rangle - |\updownarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle\right)$$

A mierzy w bazie $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$: B

$|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow |\updownarrow\rangle$

$|\updownarrow\rangle \longrightarrow |\leftrightarrow\rangle$

Ale zauważmy, że

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle|\nwarrow\rangle - |\nwarrow\rangle|\nearrow\rangle\right)$$

więc to samo w innej bazie.

Czyli A swoim pomiarem wybiera bazę u B. Ale to nie pozwala na przesyłanie informacji:

$$\frac{1}{2}\left(|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|\right) = \frac{1}{2}\left(|\nearrow\rangle\langle\nearrow| + |\nwarrow\rangle\langle\nwarrow|\right) = \frac{1}{2}\mathbb{1}$$

Czy w takim razie to wogóle

Czy w takim razie to w ogóle do czegoś może się przydać?

2. Teleportacja

Wiemy, że dysponując jedną kopią stanu kwantowego nie możemy poznać tego stanu - stany nieortogonalne nierozróżnialne. Np. różne stany polaryzacyjne.

Mamy problem głębszy dlaczego chcieli gdzieś odtworzyć wiernie stan kwantowy jakiegoś układu - np. teleportować człowieka: dokładnie poznać stan wszystkich atomów, przesłać tę informację w jakiejś postaci i gdzie w innym miejscu z tej informacji zrekonstruować całą strukturę.

Mamy tu zasadę z zasady nieoznaczoności Heisenberga, nie da się zmierzyć (ani zredukować) jednocześnie położenia i pędu cząstki z dowolną dokładnością.

W Star-Treku używano urządzeń zwane kompensatorami Heisenberga, które pozwalały pobrać odczyt i odtwarzać wiernie stan kwantowy układu.
W roku 1993 fizycy uświadomili sobie że kompensatory jednak nie są potrzebne!

A nieznany stan qubitu $\qquad$ B

$|\varphi\rangle$

Chcemy go „przesłać" do B ale nie przenosząc fizycznie.

Jest to możliwe jeśli A i B mają stan splątany (singlet $|\psi^-\rangle$)

A - - - - - - telefon - - - - - - B

$|\varphi\rangle$

① ② ~~~~ $|\psi^-\rangle$ ~~~~ ③

Dodatkowo załóżmy, że A i B mogą komunikować się klasycznie (telefon)

Idea:

A

① ②~~

↓

①~~②

A wykonuje pewien szczególny pomiar na cząstkach ①, ②

Dzięki temu, że cząstki ② i ③ były splątane stan ③ zmienia się w wyniku pomiaru. Jeśli pomiar był wybrany właściwie, stan ③ może zmienić się w teleportowany stan $|\varphi\rangle$ cząstki ①, (tak w miejsce nieznanego stanu $|\varphi\rangle$.)
Jednocześnie w wyniku pomiaru,

Jednocześnie w wyniku pomiaru, splątane stają się cząstki 1, 2, splątanie między 2 i 3 ginie, podobnie jak stan $|\psi\rangle$ cząstki 1.

Szczegóły:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |\psi_-\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|001\rangle - a|010\rangle + b|101\rangle - b|110\rangle)$$

We can rewrite this state in a different form

$$= \frac{1}{2}\Big[-|\psi_-\rangle \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) - |\psi_+\rangle \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)$$
$$+ |\varphi_-\rangle \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle) + |\varphi_+\rangle \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle)\Big]$$

Check

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[-(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle)$$
$$- (|01\rangle + |10\rangle) \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)$$
$$+ (|00\rangle - |11\rangle) \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle)$$
$$+ (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(-2a|010\rangle - \cancel{b|011\rangle} + \cancel{b|011\rangle} + \cancel{a|100\rangle} - \cancel{a|100\rangle}$$
$$+ 2b|101\rangle + 2a|001\rangle + \cancel{b|000\rangle} - \cancel{b|000\rangle}$$
$$- \cancel{a|111\rangle} + \cancel{a|111\rangle} - 2b|110\rangle\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|001\rangle - a|010\rangle + b|101\rangle - b|110\rangle)$$

We perform a measurement on qubits 1 & 2 in the Bell basis & if we measure:

Measurement of A		State of B
$\lvert\psi_-\rangle$		$a\lvert 0\rangle + b\lvert 1\rangle =: \lvert\varphi\rangle$
$\lvert\psi_+\rangle$	$\Longrightarrow$	$a\lvert 0\rangle - b\lvert 1\rangle = \lvert\varphi_1\rangle$
$\lvert\varphi_-\rangle$		$a\lvert 1\rangle + b\lvert 0\rangle = \lvert\varphi_2\rangle$
$\lvert\varphi_+\rangle$		$a\lvert 1\rangle - b\lvert 0\rangle = \lvert\varphi_3\rangle$

$|\psi_+\rangle$ $\qquad\qquad a|1\rangle - b|0\rangle = |\psi_3\rangle$

A tells B which measurement result he obtained
Can B correct his state?

ψ:
- $|\psi_-\rangle$, B does nothing.
- $|\psi_+\rangle$, B applies unitary operation $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}(a|0\rangle - b|1\rangle) = a|0\rangle + b|1\rangle = |\psi\rangle$$

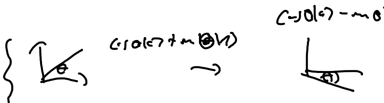
Co to jest za operacja: $a|\leftrightarrow\rangle + b|\updownarrow\rangle \rightarrow a|\leftrightarrow\rangle + b e^{i\pi}|\updownarrow\rangle$
fizycznie

opóźnia jedną polaryzację o π względem drugiej (płytka falówka)

- $|\psi_-\rangle$, B applies $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(a|1\rangle + b|0\rangle) = |\psi\rangle$

$$a|\leftrightarrow\rangle + b|\updownarrow\rangle \rightarrow a|\updownarrow\rangle + b|\leftrightarrow\rangle$$

Obrót polaryzacji .... Jak?
Można polaryzatorem, ale tylko jeden, a przy tym ze stratami

płytka falówka pod kątem 45° 

- $|\psi_+\rangle$ B applies $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}(a|1\rangle - b|0\rangle) = |\psi\rangle$

opóźnienie fazowe + obrót.

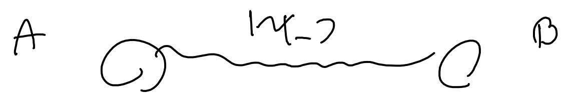
Teleportation is finished.

<u>Remarks:</u>
- neither A nor B knows the state
- state is destroyed at A (no-cloning)
- until communication from A, B state is a mixture of four states

$$\rho = \frac{1}{4}\left(|\psi\rangle\langle\psi| + |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|\right) = \mathbb{1}$$

- no superluminal communication, although very strange.

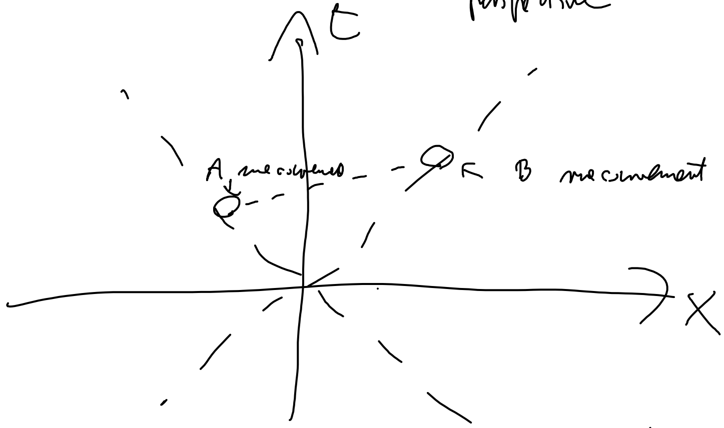
<u>Who collapses the wave function?</u>



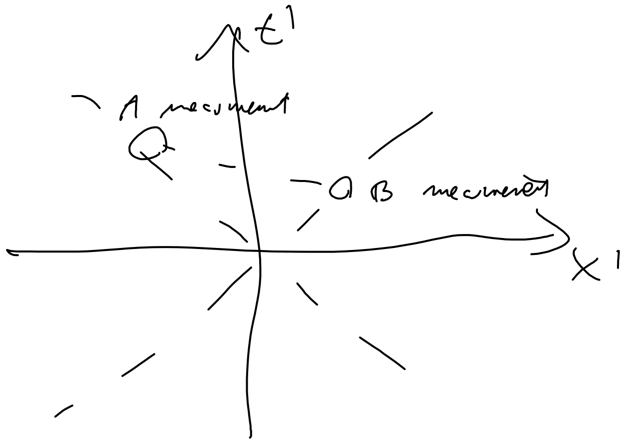
if A measures $|0\rangle$ $\longrightarrow$ B result is determined to be $|1\rangle$

We could say that measurement of A collapsed the wave function and determined the result of B

Interesting if we look from special relativity perspective



If event are space-like separated, there is another inertial frame in which



So it is B that caused the collapse of the wave function and A result was determined by B results..

So only if A, B measurements are time-like separated we may say who collapsed the wave function.