Kanały kwantowe

Rozważaliśmy następującą sytuację: Układ Alicji przygotowany w stanie $|\psi\rangle_A$ lub ogólniej $\hat{\rho}_A$. Układ Ewy przygotowany w stanie $|e_{ini}\rangle_E$. Całość poddajemy działaniu operacji unitarnej $\hat{U}$. Na końcu interesuje nas stan układu Alicji $\hat{\rho}_A'$.

$$\hat{\rho}_A' = \mathrm{Tr}_E\left[\hat{U}\left(\hat{\rho}_A \otimes |e_{ini}\rangle_E\langle e_{ini}|\right)\hat{U}^\dagger\right]$$

Przekształćmy to wyrażenie

$$\mathrm{Tr}_E\left[\hat{U}\left(\hat{\rho}_A \otimes |e_{ini}\rangle_E\langle e_{ini}|\right)\hat{U}\right.$$

$$= \sum_i {}_E\langle i|\hat{U}\left(\hat{\rho}_A \otimes |e_{ini}\rangle_E\langle e_{ini}|\right)\hat{U}^\dagger|i\rangle_E$$

↑ wybieramy bazę układu Ewy

$$= \sum_i \underbrace{{}_E\langle i|\hat{U}|e_{ini}\rangle_E}_{\text{to możemy traktować jako operator działający na stany Alicji}} \hat{\rho}_A \, {}_E\langle e_{ini}|\hat{U}^\dagger|i\rangle_E$$

(wystarczy rozwinąć jawnie wypisane wyrażenia w ustalonej bazie.

Oznaczmy $\hat{A}_i = {}_E\langle i|\hat{U}|e_{ini}\rangle_E$

Zatem $\hat{\rho}_A' = \sum_i \hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger$

Pomysły bardziej abstrakcyjne:

$$\sum_i \hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger = \Lambda(\hat{\rho})$$

to jest pewne odwzorowanie liniowe operatorów.

Jakie warunki musi spełniać?

Oczywiste

$$\hat{\rho} \geq 0 \Rightarrow \Lambda(\hat{\rho}) \geq 0$$

DODATNIOŚĆ.

Będziemy też chcieli:

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = 1 \Rightarrow \mathrm{Tr}[\Lambda(\hat{\rho})] = 1$$

ZACHOWANIE ŚLADU.

POSITIVE TRACE-PRESERVING MAP.

Czy to wszystkie warunki jeśli Λ dało się zrealizować fizycznie (czyli poprzez oddziaływanie z innym układem - nie interpretując nic pomiarów)?

Okazuje się, że to nie wszystko.
Problem najlepiej wyjaśnić na przykładzie.

Weźmy $\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbb{1}} + \vec{s}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right)$

Zatem

$$\Lambda(\hat{\rho}_A) = \frac{1}{2}\Big(\Lambda(\hat{\mathbb{1}}) + s_1\Lambda(\hat{\sigma}_1) + s_2\Lambda(\hat{\sigma}_2) + s_3\Lambda(\hat{\sigma}_3)\Big).$$

Niech,

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(\hat{\mathbb{1}}) &= \hat{\mathbb{1}}, \\ \Lambda(\hat{\sigma}_1) &= \eta_1\hat{\sigma}_1 \\ \Lambda(\hat{\sigma}_2) &= \eta_2\hat{\sigma}_2 \\ \Lambda(\hat{\sigma}_3) &= \eta_3\hat{\sigma}_3 \end{aligned}\right\}$$

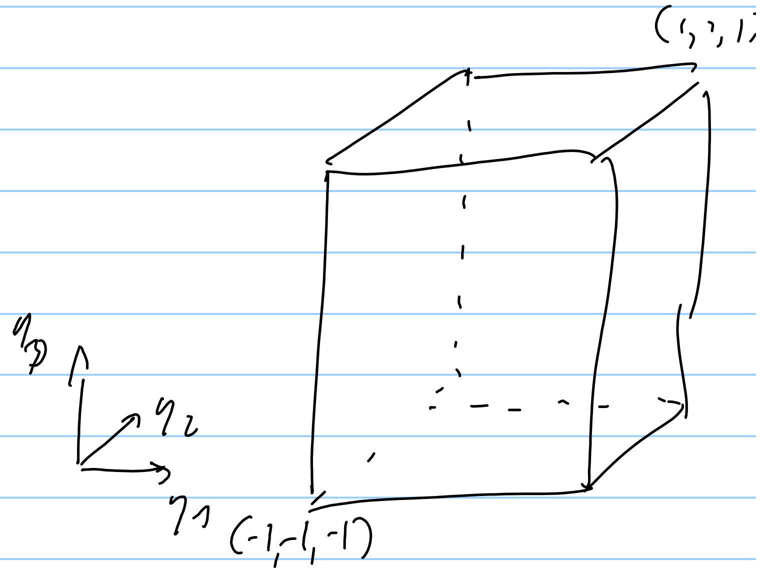
PEŁNA SZCZEGÓLNA KLASA ODWZOROWAŃ (*)

Wektor Blocha po oddziaływaniu:

$$\vec{s}\,' = \begin{pmatrix} \eta_1 s_1 \\ \eta_2 s_2 \\ \eta_3 s_3 \end{pmatrix}.$$

Ograniczenia na η:

$$|\eta_1| \le 1$$
$$|\eta_2| \le 1$$
$$|\eta_3| \le 1$$



– jeśli nie tylko zgadniemy odwrócenie, ale także zapewnimy nierozróżnialność śladu.

Ale mamy też przykład:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 1, \quad \eta_3 = 0$$

Czy są fizyczne?

Załóżmy, że qubit, który Alicja poddaje oddziaływaniu, jest SPLĄTANY z innym qubitem (należącym do Boba lub do otoczenia naszego).

$$|\Psi_-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

Interesuje nas:

$$(\Lambda \otimes Id)\left(|\Psi_-\rangle_{AB}\langle\Psi|\right)$$

na podukładzie A

odwzorowanie identycznościowe na OPERATORACH układu Boba (gdyby na stanach, to one wyglądają jak Λ).

Jak to przemnożyć? W rzeczywistości dowody był bardzo pożyteczny wzór:

$$|\Psi_-\rangle_{AB}\langle\Psi_-| = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbb{1}}\otimes\hat{\mathbb{1}} - \hat{\sigma}_1\otimes\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2\otimes\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_3\otimes\hat{\sigma}_3\right)$$

W takim razie

$$\left(\Lambda\otimes Id\right)\left(|\Psi_-\rangle_{AB}\langle\Psi_-|\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\Lambda(\hat{\mathbb{1}})\otimes\hat{\mathbb{1}} - \Lambda(\hat{\sigma}_1)\otimes\hat{\sigma}_1 - \Lambda(\hat{\sigma}_2)\otimes\hat{\sigma}_2 - \Lambda(\hat{\sigma}_3)\otimes\hat{\sigma}_3\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbb{1}}\otimes\hat{\mathbb{1}} - \eta_1\sigma_1\otimes\sigma_1 - \eta_2\sigma_2\otimes\sigma_2 - \eta_3\sigma_3\otimes\sigma_3\right)$$

Zapiszmy dalej jawnie:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\eta_3 & 0 & 0 & -\eta_1+\eta_2 \\ 0 & 1+\eta_3 & -\eta_1-\eta_2 & 0 \\ 0 & -\eta_1-\eta_2 & 1+\eta_3 & 0 \\ -\eta_1+\eta_2 & 0 & 0 & 1-\eta_3 \end{pmatrix}$$

Ślad $= 1$, więc w porządku.

No ale naturalnie jest oczekiwać, że to też jest prawdziwe nawet gdy [illegible].

Sprawdźmy, czy wartości stałe są nieujemne

$$(1-\eta_3-4\lambda)^2-(\eta_1-\eta_2)^2=0$$

lub

$$(1+\eta_3-4\lambda)^2-(\eta_1+\eta_2)^2=0$$

$$\lambda=\frac{1}{4}\left(1-\eta_3\pm(\eta_1-\eta_2)\right)$$

lub

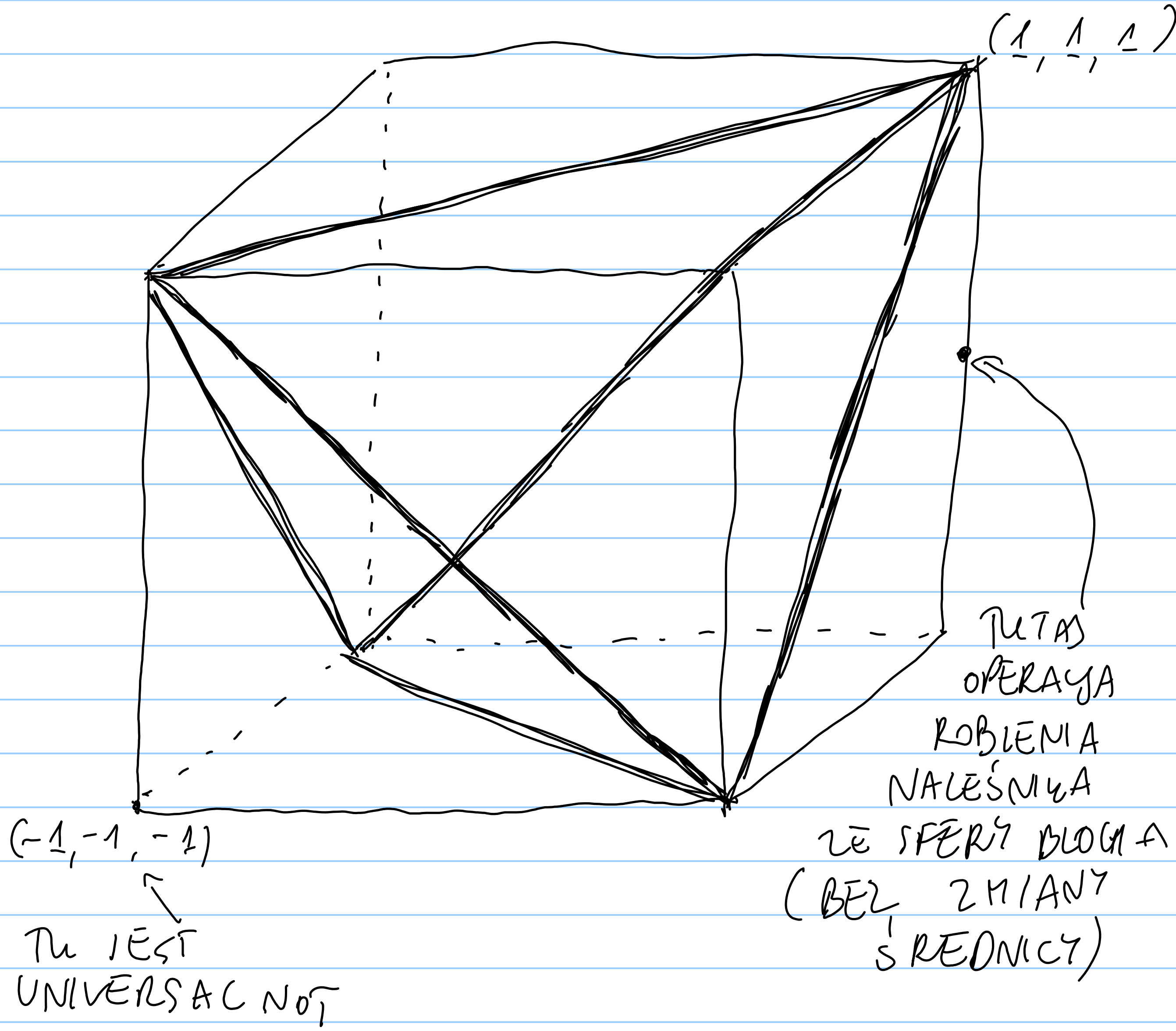
$$\lambda=\frac{1}{4}\left(1+\eta_3\pm(\eta_1+\eta_2)\right)$$

Chcemy, żeby WSZYSTKIE wartości stałe były nieujemne.

Otrzymujemy zestaw warunków:

$$\left.\begin{aligned}
\eta_3-\eta_1+\eta_2 &\le 1\\
\eta_3+\eta_1-\eta_2 &\le 1\\
-\eta_3+\eta_1+\eta_2 &\le 1\\
-\eta_3-\eta_1-\eta_2 &\le 1
\end{aligned}\right\}(**)$$

W wyniku otrzymujemy:



Widać, że otrzymane wartości są niefizyczne. Aby Λ było fizyczne, musi spełniać warunek CAŁKOWITEJ DODATNIOŚCI, tzn. że jeśli dołączymy do niego układ ten dowolny inny układ, to rozszerzenie

$\Lambda \otimes Id$ jest dodatnio określone. rozszerzenie jest fizyczne, ale warunek jest niefizyczny. Wynika to z istnienia stanów splątanych.

Okazuje się, że warunki (**) są konieczne i dostateczne, żeby odwzorowanie (*) było całkowicie dodatnie.

Co więcej, nasz wynik jest tak naprawdę ogólniejszy. Równanie:

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\hat{\sigma}_1) \\ \Lambda(\hat{\sigma}_2) \\ \Lambda(\hat{\sigma}_3) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbb{H}} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}$$

to się nazywa odwzorowania UNITALNE, dla nich $\Lambda(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Bardzo przydatnym narzędziem jest

Rozkład na wartości osobliwe: dowolną macierz $N \times N$ można przedstawić jako:

$$\mathbb{M} = \mathbb{U}_1 \mathbb{D} \mathbb{U}_2$$

gdzie $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ - unitarne

$\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots)$

ξ_i - rzeczywiste i nieujemne.

Macierz $\mathbb{H}$ ma elementy rzeczywiste. W tym najogólniejszym przypadku możemy zapisać:

$$\mathbb{H} = \mathbb{O}_1 \begin{pmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \eta_2 & \\ 0 & & \eta_3 \end{pmatrix} \mathbb{O}_2$$

Możemy założyć, iż $\mathbb{O}_1$ oraz $\mathbb{O}_2$ były obrotami właściwymi (o wyznaczniku równym 1). Obroty w takie odpowiadają transformacji unitarnej i te nie zmieniają ich separowalności.

Zatem (**) charakteryzuje nam całą klasę

COPLETELY POSITIVE
TRACE PRESERVING
UNITAL
QUBIT MAPS

Zadanie na ćwiczenia

Rozważmy klasę stanów dwuqubitowych postaci

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} - \eta_1 \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_1 - \eta_2 \hat{\sigma}_2 \otimes \hat{\sigma}_2 - \eta_3 \hat{\sigma}_3 \otimes \hat{\sigma}_3\right)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na separowalność jest

$$\hat{\rho}_{AB}^{T_B} \geq 0.$$

Uwaga! Ten warunek na η_1, η_2, η_3