Operacje kwantowe

Rozważaliśmy następującą sytuację: Układ Alicji przygotowany w stanie $|\psi\rangle_A$ lub ogólniej $\hat{\rho}_A$. Układ Ewy przygotowany w stanie $|e_{ini}\rangle_E$. Całości poddajemy działaniu operacji unitarnej $\hat{U}$. Na końcu interesuje nas stan układu Alicji $\hat{\rho}_A'$.

$$\hat{\rho}_A' = \mathrm{Tr}_E\left[\hat{U}\left(\hat{\rho}_A \otimes |e_{ini}\rangle_E\langle e_{ini}|\right)\hat{U}^\dagger\right]$$

Przekształćmy to wyrażenie

$$\mathrm{Tr}_E\left[\hat{U}\left(\hat{\rho}_A \otimes |e_{ini}\rangle_E\langle e_{ini}|\right)\hat{U}\right.$$

$$= \sum_i {}_E\langle i|\hat{U}\left(\hat{\rho}_A \otimes |e_{ini}\rangle_E\langle e_{ini}|\right)\hat{U}^\dagger|i\rangle_E$$

i ← wybieramy bazę układu Ewy

$$= \sum_i \underbrace{{}_E\langle i|\hat{U}|e_{ini}\rangle_E}_{\substack{\text{to możemy traktować jako}\\ \text{operator działający na stany Alicji}}}\ \hat{\rho}_A\ {}_E\langle e_{ini}|\hat{U}^\dagger|i\rangle_E$$

(wystarczy rozpisać jawnie wyrażenie w ustalonej bazie).

Oznaczmy $\hat{K}_i = {}_E\langle i|\hat{U}|e_{ini}\rangle_E$

Zatem $$\hat\rho'_A = \sum_i \hat K_i \hat\rho_A \hat K_i^\dagger$$

Jakie warunki muszą spełniać $\hat K_i$?
Chcemy, żeby dla każdego $\hat\rho$ ślad był zachowany:

$$\mathrm{Tr}\,\hat\rho'_A = \sum_i \mathrm{Tr}(\hat K_i \hat\rho \hat K_i^\dagger) = \mathrm{Tr}\Big[\underbrace{\Big(\sum_i \hat K_i^\dagger \hat K_i\Big)}_{\hat{1}}\hat\rho\Big] = 1$$

Zatem
$$\sum_i \hat K_i^\dagger \hat K_i = \hat{1}. \qquad (*)$$

Zestaw operatorów $\{\hat K_i\}$ spełniający warunek (*) nazywamy OPERACJĄ KWANTOWĄ.
$\hat K_i$ – OPERATORY KRAUSA.

Każde odwzorowanie całkowicie dodatnie zachowujące ślad można przedstawić w postaci (*). __Uwaga__: rozkład nie jest jednoznaczny – choćby dlatego, że możemy wziąć różne bazy w E.

Przypuśćmy, że Ewa mierzy swój układ w bazie $|i\rangle_E$. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania wyniku i?

$$p_i = \mathrm{Tr}_A\left[{}_E\langle i|\hat U|e_{ini}\rangle_E\, \hat\rho_A\, \langle e_{ini}|\hat U^\dagger|i\rangle_E\right]$$
$$= \mathrm{Tr}_A\left[\hat K_i\hat\rho_A\hat K_i^\dagger\right] = \mathrm{Tr}_A\left[\hat K_i^\dagger\hat K_i\hat\rho_A\right]$$

Ostatnie wyrażenie ma postać __pomiaru__ __uogólnionego__ z $\hat M_i = \hat K_i^\dagger \hat K_i$.

A co się dzieje z układem Alicji?

STAN WARUNKOWY:

$$\hat{\tilde{\rho}}^{(i)} = \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger$$

<u>Uwaga</u>: ten stan nie jest unormowany.

$p_i = Tr\left(\hat{\tilde{\rho}}^{(i)}\right)$ to jest PRAWDOPODOBIEŃSTWO otrzymania wyniku i. Jeśli interesują nas wartości oczekiwane na podzespole, to mamy użyć $\frac{1}{p_i}\hat{\tilde{\rho}}^{(i)}$.

Przykłady można mnożyć — zrobimy to na ćwiczeniach.

Mamy teraz wszystko, żeby omówić

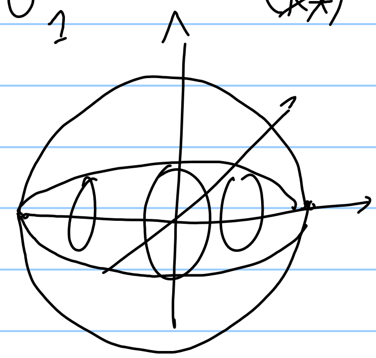
KWANTOWĄ KOREKCJĘ BŁĘDÓW.

Załóżmy, że mamy ensemble qubitów i każdy z nich może przekręcić się wokół [illegible]

<u>NIEZALEŻNIE</u>

Rozważmy sobie przypadek.

$$\hat{\rho} \longrightarrow (1-p)\hat{\rho} + p\,\hat{\sigma}_1 \hat{\rho} \hat{\sigma}_1 \qquad (**)$$



działanie dla jednego qubitu.

Operacje:

$$\sqrt{1-p}\,\hat{\mathbb{1}}, \quad \sqrt{p}\,\hat{\sigma}_1$$

Niech

$$|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle \quad \begin{cases} \xrightarrow{1-p} & \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle \\ \xrightarrow{p} & \psi_0|1\rangle + \psi_1|0\rangle \end{cases}$$

"BIT FLIP ERROR"

<u>Zadanie</u>: Użyć zestaw qubitów fizycznych z których każdy podlega transformacji (**) i zakodować qubit logiczny tak, żeby OBNIŻYĆ PRAWDOPODOBIEŃSTWO BŁĘDU.

Klasycznie już wiedzieliśmy co zrobić

$$|0_L\rangle = |000\rangle$$

$$|1_L\rangle = |111\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$$

Z prawd.

$$(1-p)^3 \qquad (\hat{1}\otimes\hat{1}\otimes\hat{1})|\Psi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

$$p(1-p)^2 \qquad (\hat{\sigma}_1\otimes\hat{1}\otimes\hat{1})|\Psi\rangle = \alpha|100\rangle + \beta|011\rangle$$

$$p(1-p)^2 \qquad (\hat{1}\otimes\hat{\sigma}_1\otimes\hat{1})|\Psi\rangle = \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle$$

$$p(1-p)^2 \qquad (\hat{1}\otimes\hat{1}\otimes\hat{\sigma}_1)|\Psi\rangle = \alpha|001\rangle + \beta|110\rangle$$

Czy da się naprawić? Bardzo przyjemna cecha: bez względu na amplitudy α i β te oba stany są w ortogonalnych podprzestrzeniach rzutowej operacji kwantowej!

$$\hat{P}_0 = |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|$$

$$\hat{P}_1 = |100\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 011|$$

$$\hat{P}_2 = |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101|$$

$$\hat{P}_3 = |001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110|$$

W ten sposób możemy zidentyfikować z którego ~ stanu mamy do czynienia BEZ NISZCZENIA SUPERPOZYCJI.

Jak już to wiemy, to działamy operatorami:

0: $\hat{1} \otimes \hat{1} \otimes \hat{1}$

1: $\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{1} \otimes \hat{1}$ i odzyskujemy stan $|\Psi\rangle$.

2: $\hat{1} \otimes \hat{\sigma}_1 \otimes \hat{1}$

3: $\hat{1} \otimes \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_1$

A co, gdybyśmy mieli do czynienia z błędem fazowym $\hat{\sigma}_3$?

$$\hat{\sigma}_3 = \hat{H}\hat{\sigma}_1\hat{H} \qquad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Dobre kodowanie

$$\left(\hat{H}\otimes\hat{H}\otimes\hat{H}\right)\left(\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle\right) \qquad (**)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\Big[\alpha\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\left(|0\rangle+|1\rangle\right) + \beta\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\Big]$$

W ogólności: standardowy model szumu:

$$\hat{\rho} \longrightarrow (1-p)\hat{\rho} + \frac{1}{3}\hat{\sigma}_1\hat{\rho}\hat{\sigma}_1 + \frac{1}{3}\hat{\sigma}_2\hat{\rho}\hat{\sigma}_2 + \frac{1}{3}\hat{\sigma}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3$$

Czyli albo $\hat{\sigma}_1$, albo $\hat{\sigma}_3$, albo $\sigma_2 = i\sigma_1\sigma_3$

Mamy kody które naprawiają błędy z $\hat{\sigma}_1$ i $\hat{\sigma}_3$ z osobna. Można je POŁĄCZYĆ:
po prawej stronie (**) wstawmy każde $|0\rangle$ i $|1\rangle$ POTRÓJNYM zerem i jedynką:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}\Big[\alpha\left(|000\rangle+|111\rangle\right)\left(|000\rangle+|111\rangle\right)\left(|000\rangle+|111\rangle\right) + \beta\left(|000\rangle-|111\rangle\right)\left(|000\rangle-|111\rangle\right)\left(|000\rangle-|111\rangle\right)\Big]$$

Kod 9-qubitowy. Poradzi sobie z $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z$ i innymi?