Informacja kwantowa 1/2 - wykład 7

Wróćmy do gry omawianej na poprzednim wykładzie. To co mamy mierzyć, to pewną funkcję korelacji dla iloczynu dwóch wielkości:

$$a(\Theta_a),\quad b(\Theta_b) = \pm 1.$$

To, co nas interesuje to

$$C(\Theta_a, \Theta_b) = \langle a(\Theta_a) b(\Theta_b) \rangle$$

uśrednienie po wielu próbach.

Zauważmy, że wyniki pomiarów są predefiniowane, możemy matematycznie wyrazić jako:

$$C(\Theta_a, \Theta_b) = \quad \text{"LOCAL REALITIES"}$$

$$= \int d\lambda\, P(\lambda)\, a(\Theta_a; \lambda)\, b(\Theta_b; \lambda)$$

"ZMIENNE UKRYTE"

rozkład prawdopodobieństwa zmiennych ukrytych

Możemy otrzymać teraz nierówności Bella i zauważmy, że

$$-1 \leq a(\Theta_a; \lambda) \leq 1$$

$$-1 \leq b(\Theta_b; \lambda) \leq 1$$

Te relacje, oraz warunek że $P(\lambda)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa, wystarczają do pokazania że

$$-2 \le C(\theta_{a_1},\theta_{b_1}) + C(\theta_{a_1},\theta_{b_2}) + C(\theta_{a_2},\theta_{b_1}) - C(\theta_{a_2},\theta_{b_2}) \le 2.$$

Nierówność CHSH
(Clauser Horne Shimony Holt)

Dowód na ćwiczeniach.
To co więcej pokazali oznaczając eksperyment kwantowy, to że możemy otrzymać funkcję korelacji postaci.

$$C(\theta_a,\theta_b) = -\cos(\theta_a-\theta_b)$$

i że łamie ona nierówność CHSH.

WAŻNE W naszym doświadczeniu nie była przekazana natychmiast ŻADNA informacja pomiędzy Alicją i Bobem.
Dobry przykład: losowy i pewny bit zapakowane w paczki i wysłane do Alicji i Boba.
Alicja otwiera paczkę, widzi otrzymany bit i wie jaki znalazł się u Boba.
Ale to nie oznacza przesyłu informacji.

Uporządkujmy nieco notację dla układów złożonych. Dla ustalenia uwagi, mamy dwa fotony A i B. Jeśli są przygotowane w stanach $|\psi\rangle_A$ i $|\chi\rangle_B$ to ich ŁĄCZNY STAN zapisujemy jako iloczyn $|\psi\rangle_A |\chi\rangle_B$. Matematycznie, to jest ILOCZYN TENSOROWY oznaczany $|\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$.

Iloczyn tensorowy jest liniowy względem każdego ze składników. Jeśli rozłożymy

$$|\psi\rangle_A = \psi_0 |\leftrightarrow\rangle_A + \psi_1 |\updownarrow\rangle_A$$

$$|\chi\rangle_B = \chi_0 |\leftrightarrow\rangle_B + \chi_1 |\updownarrow\rangle_B$$

to możemy zapisać:

$$|\psi\rangle_A |\chi\rangle_B = \psi_0 \chi_0 |\leftrightarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B + \psi_0 \chi_1 |\leftrightarrow\rangle_A |\updownarrow\rangle_B + \psi_1 \chi_0 |\updownarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B + \psi_1 \chi_1 |\updownarrow\rangle_A |\updownarrow\rangle_B$$

Wszystkie kombinacje wektorów bazowych dla pojedynczych fotonów tworzą bazę dla układu złożonego:

$$|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle_{AB}$$
$$|\leftrightarrow\updownarrow\rangle_{AB}$$
$$|\updownarrow\leftrightarrow\rangle_{AB}$$
$$|\updownarrow\updownarrow\rangle_{AB}$$

W tej bazie:

$$|\psi\rangle_A|\chi\rangle_B \equiv \begin{pmatrix} \psi_0\chi_0 \\ \psi_0\chi_1 \\ \psi_1\chi_0 \\ \psi_1\chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \\ \\ \psi_1 \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Czyli składowe wektora pierwszego układu mnożymy przez repliki wektora drugiego układu.

Czy to jest baza ortogonalna? Iloczyn skalarny dla układu złożonego definiujemy następująco:

$$\left({}_A\langle\psi'| \otimes {}_A\langle\chi'|\right)\left(|\psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B\right)$$

$$= \langle\psi'|\psi\rangle \langle\chi'|\chi\rangle$$

← to już jest zwykłe mnożenie

Widzimy zatem, że wektory $|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$, $|\leftrightarrow\updownarrow\rangle$, $|\updownarrow\leftrightarrow\rangle$, $|\updownarrow\updownarrow\rangle$ są wzajemnie ortogonalne. Fizycznie, wystarczy rozróżnialność tylko jednego z podukładów.

Prosta notacja, która prowadzi do potężnego nieporozumienia koncepcyjnego.

Żeby przewidzieć wyniki naszego doświadczenia, trzeba było policzyć:

$$\left({}_A\langle \theta_a | \otimes {}_B\langle \theta_b | \right) |\Psi_-\rangle_{AB} =$$

$$= {}_A\langle \theta_a | \underbrace{\left({}_B\langle \theta_b | \Psi_-\rangle_{AB} \right)}$$

"CZĘŚCIOWY" ILOCZYN SKALARNY:

BRA PODUKŁADU B SKLEJAMY Z KETAMI PODUKŁADU B, WIĘC ZOSTAJE PEŁEN KET DLA PODUKŁADU A.

Oznaczmy go sobie

$$|\tilde{\psi}_-(\theta_b)\rangle_A = {}_B\langle \theta_b | \Psi_-\rangle_{AB} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\frac{\theta_b}{2} |\updownarrow\rangle - \sin\frac{\theta_b}{2} |\leftrightarrow\rangle \right)$$

STAN WARUNKOWY podukładu A, jeśli podukład B został zmierzony w stanie $|\theta_b\rangle_B$.

Ta notacja sugeruje, że jeśli zmierzymy podukład B, to "NATYCHMIAST" coś się dzieje z podukładem A. Ale to jest NADINTERPRETACJA formalizmu. Stan kwantowy jest tylko narzędziem matematycznym do przewidywania wyników pomiarów. To, co ma fizyczne znaczenie, to prawdopodobieństwa wyników pomiarów! A te spełniają ZASADĘ PRZYCZYNOWOŚCI.

Norma STANU WARUNKOWEGO:

$$ {}_A\langle\tilde\psi_-(\theta_b)|\tilde\psi_-(\theta_b)\rangle_A = {}_A\langle\tilde\psi_-(\theta_b)|\hat{1}_A|\tilde\psi_-(\theta_b)\rangle_A $$

$$ = {}_{AB}\langle\Psi_-|\left(\hat{1}_A\otimes|\theta_b\rangle_B\langle\theta_b|\right)|\Psi_-\rangle_{AB} $$

na podukładzie A mierzymy cokolwiek,

foton B zmierzony w stanie $|\theta_b\rangle_B$

np. $\hat{1}_A = |\leftrightarrow\rangle_A\langle\leftrightarrow| + |\updownarrow\rangle_A\langle\updownarrow|$

Zatem ${}_A\langle\tilde\psi_-(\theta_b)|\tilde\psi_-(\theta_b)\rangle_A$ jest prawdopodobieństwem zmierzenia fotonu B w stanie $|\theta_b\rangle_B$

OPERATORY DLA UKŁADÓW ZŁOŻONYCH.

Ogólny stan $$ |\Psi\rangle_{AB} = \sum_{ij}\Psi_{ij}|i\rangle_A|j\rangle_B $$

Iloczyn tensorowy operatorów:

$$ (\hat A\otimes\hat B)|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{ij}\Psi_{ij}(\hat A|i\rangle_A)\otimes(\hat B|j\rangle_B) $$

ten symbol $\otimes$ bardzo się przydaje. Jeśli podukłady są takie same, to $\hat A\hat B$ znaczy coś zupełnie innego niż $\hat A\otimes\hat B$.

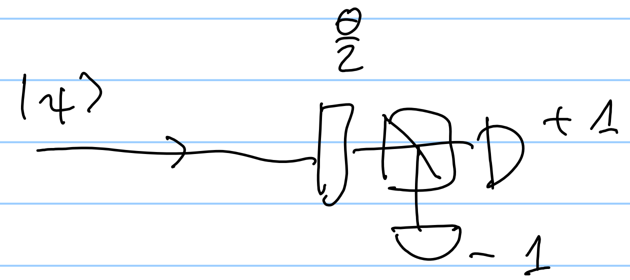
W bazie $|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle, |\leftrightarrow\updownarrow\rangle, |\updownarrow\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\updownarrow\rangle$

$$\hat{A}\otimes\hat{B} \equiv \begin{pmatrix} A_{00}\hat{B} & A_{01}\hat{B} \\ A_{10}\hat{B} & A_{11}\hat{B} \end{pmatrix}$$

<u>ĆWICZENIE</u>: Pokazać, że w tej bazie:

$$|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbb{1}}\otimes\hat{\mathbb{1}} - \hat{\sigma}_1\otimes\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2\otimes\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_3\otimes\hat{\sigma}_3\right)$$

<u>PRZYKŁAD</u>



Wartość średnia:

$$|\langle\theta|\psi\rangle|^2 - |\langle\theta+\pi|\psi\rangle|^2$$

$$= \langle\psi|\underbrace{\left(|\theta\rangle\langle\theta| - |\theta+\pi\rangle\langle\theta+\pi|\right)}|\psi\rangle$$

Oznaczmy sobie $\hat{\sigma}_\theta = \hat{\sigma}_1 \sin\theta + \hat{\sigma}_3\cos\theta$

(ĆWICZENIE)

Jeżeli teraz mierzymy ich pomiary dla dwóch fotonów tak jak w naszej grze, to odpowiada to wyznaczeniu korelacji oczekiwanej

$$C(\theta_a, \theta_b) = {}_{AB}\langle \Psi_- | \hat{\sigma}_{\theta_a} \otimes \hat{\sigma}_{\theta_b} | \Psi_- \rangle_{AB}$$

Pokażemy stosując metody dotychczasowe, że

$$= -\cos(\theta_a - \theta_b)$$

ĆWICZENIE

Pomiar możemy też opisać wektorami Blocha $\bar{a}$ i $-\bar{a}$ z wynikami ± 1 odpowiada pomiarowi $\hat{\sigma}_{\bar{a}} = \bar{a} \cdot \hat{\bar{\sigma}}$
Pokazać, że

$$\langle \Psi_- | \hat{\sigma}_{\bar{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\bar{b}} | \Psi_- \rangle = -\bar{a} \cdot \bar{b}$$

Oczywiste pytanie: jakie stany są ciekawe (tzn. mają szansę na łamanie nierówności Bella)?
Łatwiej odpowiedzieć na pytanie jakie stany są nieciekawe.
Na przykład: $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$ - STAN PRODUKTOWY (PRODUCT STATE).

$$C(\theta_a, \theta_b) = \langle \varphi | \hat{\sigma}_{\theta_a} | \varphi \rangle \langle \chi | \hat{\sigma}_{\theta_b} | \chi \rangle$$

brak jakichkolwiek korelacji

Rozważmy teraz MIESZANINĘ STATYSTYCZNĄ STANÓW ILOCZYNOWYCH – STAN SEPAROWALNY

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i w_i \left(|\psi^{(i)}\rangle_A \otimes |\chi^{(i)}\rangle_B \right)\left({}_A\langle\psi^{(i)}| \otimes {}_B\langle\chi^{(i)}| \right)$$

$$\overset{?}{=} \sum_i w_i\, |\psi^{(i)}\rangle_A\langle\psi^{(i)}| \otimes |\chi^{(i)}\rangle_B\langle\chi^{(i)}|$$

ALTERNATYWNA NOTACJA

Oczywiście $w_i \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$

Funkcja korelacji:

$$C(\theta_a, \theta_b) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{AB} \left(\hat{\sigma}_A \otimes \hat{\sigma}_B \right) \right]$$

$$= \sum_i w_i \langle\psi^{(i)}|\hat{\sigma}_{\theta_a}|\psi^{(i)}\rangle \langle\chi^{(i)}|\hat{\sigma}_{\theta_b}|\chi^{(i)}\rangle$$

Ale to jest dokładnie postać założona w wyprowadzeniu nierówności Bella:

$$\sum_i w_i \equiv \int d\lambda\, \rho(\lambda)$$

$$\langle\psi^{(i)}|\hat{\sigma}_{\theta_a}|\psi^{(i)}\rangle = a(\theta_a, \lambda)$$

$$\langle\chi^{(i)}|\hat{\sigma}_{\theta_b}|\chi^{(i)}\rangle = b(\theta_b, \lambda)$$

Stan separowalny NA PEWNO nie łamie nierówności Bella. Można go przygotować lokalnymi operacjami i klasyczną komunikacją.

STANY, które nie są SEPAROWALNYMI nazywa się SPLĄTANE i dla nich dzieją się ciekawe rzeczy.