Wyklad2

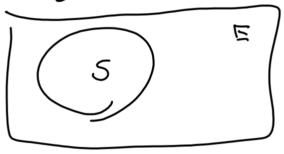
11 kwietnia 2011
10:13

Układy otwarte i dekoherencja

Wiemy że ewolucja układów izolowanych jest unitarna: $|\psi(t)\rangle = U_t|\psi(0)\rangle$, $\rho(t) = U_t\,\rho(0)\,U_t^\dagger$

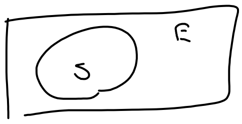
$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = -\frac{iH}{\hbar}|\psi(t)\rangle \qquad \frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho]$$

Jak opiszemy ewolucję układu w kontakcie z otoczeniem



stan początkowy: $\rho_S(0)\otimes\rho_E$. Jak będzie ewoluować S w wyniku najogólniejszych oddziaływań z E? Interesuje nas TYLKO ewolucja S. Nie mamy dostępu do E (inaczej części ewolucji unitarnej bo $S+E$ jest izolowany i temat zakończony)

1. Zredukowana macierz gęstości



Jeśli $S+E$ opisany jest macierzą gęstości ρ_{SE}. Jak opisać stan podukładu?

Mamy dostęp tylko do pomiarów lokalnych na S. Tzn jeśli P_K - op. pomiarowe na S, to prawdopodobieństwa:

$$p_K = Tr(\rho_{SE}\cdot P_K\otimes I_E)$$

$$\rho_{SE} = \sum_{\substack{i_S,i_E\\ j_S,j_E}} \rho^{i_S,i_E}_{j_S,j_E}\, |i_S\rangle\langle j_S|\otimes|i_E\rangle\langle j_E|$$

$$p_K = \sum_{\substack{i_S,i_E\\ j_S,j_E}} \rho^{i_S\, i_E}_{j_S\, j_E}\cdot P^{j_S}_{i_S}\cdot\delta^{i_E}_{j_E} = \sum_{i_S,j_S}\underbrace{\Big(\sum_{i_E}\rho^{i_S\, i_E}_{j_S\, i_E}\Big)}_{(\rho_S)^{i_S}_{j_S}}(P_K)^{j_S}_{i_S} =$$

$$= Tr(\rho_S\cdot P_K)$$

gdzie $\rho_S = Tr_E(\rho_{SE}) = \sum_i {}_E\langle i|\rho_{SE}|i\rangle_E$ zredukowana macierz gęstości

$$(\rho_S)^{i_S}_{j_S} = \sum_i \rho^{i_S,i}_{j_S,i}$$ częściowy ślad

Pełna informacja dostępna lokalnie o podukładzie S zawarta w ρ_S

2. Ewolucja podukładu

Jak ρ_S zmienia się z czasem?

Jak ρ_S zmienia się z czasem?

$$\rho_S(0)\otimes\rho_E \xrightarrow{\mathcal{U}_t^{SE}} \mathcal{U}_t^{SE}\,\rho_S(0)\otimes\rho_E\,\mathcal{U}_t^{\dagger\,SE}$$

$$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E\left(\mathcal{U}_t\,\rho_S(0)\otimes\rho_E\,\mathcal{U}_t^\dagger\right)$$

Niech $|i\rangle_E$, $i=a,\dots$ baza w E. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $\rho_E = |0\rangle\langle 0|$.

(bez utraty ogólności możemy wybrać dowolną bazę, a stan mieszany zmienia tylko mieszankę ewolucji więc nic istotnie nowego)

$$\rho_S(t) = \sum_i {}_E\langle i|\,\mathcal{U}_t\,\rho_S(0)\otimes|0\rangle_E\langle 0|\,\mathcal{U}_t^\dagger\,|i\rangle_E$$

Zdefiniujmy $K_{t,i} := {}_E\langle i|\mathcal{U}_t|0\rangle_E$ wtedy

$$\rho_S(t) = \sum_i K_{t,i}\,\rho_S(0)\,K_{t,i}^\dagger$$

operatory Krausa.

$$\sum_i K_{t,i}^\dagger K_{t,i} = \sum_i \langle 0|\mathcal{U}_t^\dagger|i\rangle\langle i|\mathcal{U}_t|0\rangle = \mathbb{1}$$

Ogólna ewolucja układu otwartego:

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i\,\rho\,K_i^\dagger, \text{ gdzie } \sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$$

Postać Krausa. Prawdziwe jest również wynikanie w drugą stronę: dla dowolnych K_i, $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$ istnieje ρ_E i $\mathcal{U}_{SE}$ t. że $\rho_{out} = \mathrm{Tr}_E\left(\mathcal{U}_{SE}\,\rho_{in}\otimes\rho_E\,\mathcal{U}_{SE}^\dagger\right)$.

$$\mathcal{U}_{SE}|\psi\rangle\otimes|e_0\rangle = \sum_k K_k|\psi\rangle|e_k\rangle$$

można rozszerzyć do unitarnej na całej przestrzeni

$$\Lambda(\rho) = \mathrm{Tr}_E\left(\mathcal{U}_{SE}\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\otimes|e_0\rangle\langle e_0|\,\mathcal{U}_{SE}^\dagger\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}_E\left(\sum_i p_i\sum_{k,k'} K_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|K_{k'}^\dagger\otimes|e_k\rangle\langle e_{k'}|\right) = \sum_k K_k\,\rho\,K_k^\dagger$$

Przykład (ćwiczenia)

Atom dwupoziomowy sprzężony z jednym modem wnęki.

Model Jaynesa–Cummingsa. ω – częstotl. modu wnęki; $|1\rangle$, $|0\rangle$: ω_0 częstotliwość przejścia w atomie

$$H = H_{atom} + H_{e-m} + H_{int} =$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega\, a^\dagger a + g\left(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a\right)$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix} \qquad \sigma_+ = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

brak fotonów we wnęce

Przyjmijmy że stan początkowy $|\psi(0)\rangle_{SE} = |\psi\rangle_S\otimes|0\rangle_E$

$a|0\rangle + b|1\rangle$

Dla uproszczenia weźmy $\omega_0 = \omega = 0$ (częstotliwości b. małe w porównaniu z energią sprzężenia ~ mają fizyczne dla ok)

- Oblicz ewolucję $|\psi(t)\rangle_{SE}$
- Zapisz ewolucję podukładu $\rho(t)_S$

Zauważmy, że $H = g(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$ nie zmienia całkowitej liczby wzbudzeń (suma wzbudzeń atomu i wnęki). Startując ze stanu $|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_E$ zawsze pozostaniemy w przestrzeni o maksymalnie jednym wzbudzeniu. Wystarczy więc rozważyć podprzestrzeń: $|0\rangle_S|0\rangle_E$, $|0\rangle_S|1\rangle_E$, $|1\rangle_S|0\rangle_E$. Szukamy wektorów własnych H:

$|\psi_0\rangle \quad H|0\rangle|0\rangle = 0$ wekt. własny, $E_0 = 0$.

$|\psi_1\rangle \quad H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) = \frac{g}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle) \quad E_1 = g$

$|\psi_2\rangle \quad H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = -\frac{g}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) \quad E_2 = -g$

$$|\psi_i(t)\rangle = e^{-iE_i t}|\psi_i(0)\rangle.$$

$$U_t = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + e^{-igt}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + e^{igt}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

$$|\psi(0)\rangle_{SE} = a|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|0\rangle = a|\psi_0\rangle + b\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle)$$

$$|\psi(t)\rangle_{SE} = a|\psi_0\rangle + b\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-igt}|\psi_1\rangle - e^{igt}|\psi_2\rangle) =$$

$$= a|0\rangle|0\rangle + b\frac{1}{2}\left(|0\rangle|1\rangle(e^{-igt} - e^{igt}) + |1\rangle|0\rangle(e^{-igt} + e^{igt})\right) =$$

$$= a|0\rangle|0\rangle - bi\sin(gt)|0\rangle|1\rangle + b\cos(gt)|1\rangle|0\rangle =$$

$$= \left(a|0\rangle + b\underbrace{\cos gt}_{\sqrt{1-\lambda}}|1\rangle\right)|0\rangle - bi\underbrace{\sin gt}_{\sqrt{\lambda}}|0\rangle|1\rangle \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$\rho_S(t) = |a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2(1-\lambda)|1\rangle\langle 1| + ab^*\sqrt{1-\lambda}|0\rangle\langle 1| + a^*b\sqrt{1-\lambda}|1\rangle\langle 0|$$

$$+ |b|^2\lambda|0\rangle\langle 0| =$$

$$= \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2\lambda & ab^*\sqrt{1-\lambda} \\ a^*b\sqrt{1-\lambda} & |b|^2(1-\lambda) \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda \to 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

stan. w stanie podstawowym.

Jakie są operatory Kraussa:

$$K_0 = {}_E\langle 0|U_t|0\rangle = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\sqrt{1-\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = {}_E\langle 1|U_t|0\rangle = -|0\rangle\langle 1|\sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sprawdźmy:

$$\rho_S(0) = \begin{bmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_S(t) = K_0\rho_S(0)K_0^\dagger + K_1\rho_S(0)K_1^\dagger = \begin{bmatrix} |a|^2 & \sqrt{1-\lambda}\,ab^* \\ \sqrt{1-\lambda}\,a^*b & |b|^2(1-\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^*b\sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda}|b|^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{\lambda} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2\lambda & ab^*\sqrt{1-\lambda} \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\dots}{\sqrt{1-\lambda}\ a^* b} \quad (|b|^2 (1-\lambda)) \right)$$

Model Tłumienia – przejście do st. podstawowego (stan czysty w ogólności staje się mieszany).
To można traktować jako b. uproszczony model emisji spontanicznej. Przez to, że tylko jeden mod pola e-m mogły nie uzyskamy zaników $e^{-\gamma t}$. Tak naprawdę mamy oscylacje.

3. Matematyczne własności

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$$

a) liniowe w ρ

b) przeprowadza op. dodatnie na dodatnie (odwzorowanie dodatnie)

c) dzięki warunkowi: $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$ z zachowaniem śladu

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = \mathrm{Tr}\left(\sum_i K_i \rho K_i^\dagger\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_i K_i^\dagger K_i \rho\right) = \mathrm{Tr}(\rho)$$

ale to nie wszystko postać Krausa zapewnia, że jest to odwzorowanie:

d) całkowicie dodatnie = rozszerzenie odwzorowania na większą przestrzeń też jest dodatnie

$$\Lambda_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE}) \geq 0 \qquad \text{to jest spełnione bo}$$

$$\sum_i K_i \otimes \mathbb{1}\ \rho_{SE}\ K_i^\dagger \otimes \mathbb{1} \geq 0$$

Matematyczny fakt: każde odwzorowanie całkowicie dodatnie $\Lambda(\rho)$ jest postaci $\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$.
(Ale dodatnie już nie koniecznie !)

4. Ewolucja Markowowska, Postać Lindblada

Postać Krausa opisuje najogólniejszą ewolucję układu który początkowo był nieskorelowany z otoczeniem a następnie ewoluował w sposób dowolny.
W ogólności to b. skomplikowana ewolucja.
Chcielibyśmy przy pewnych upraszczających założeniach bardziej przyjazną postać ewolucji podukładu, w postaci równ. różniczkowego na ewolucję ρ.

Założenia Fizyczne:

— hamiltonian H_{SE} nie zmienia się w czasie

(jednorodności)

- stan otoczenia E musi przyjść że przekazywane się nie zmienić w trakcie ewolucji: otoczenie duże, szybki czas relaksacji, słabe sprzężenie ...

$\tau_E \ll \delta t$

relaksacja otoczenia

skala czasowa ewolucji układu

(Markowskości)

Rozważamy ewolucję dla krótkiego czasu δt:

$$\rho(\delta t) = \sum_i K_i(\delta t)\,\rho(0)\,K_i^\dagger(\delta t)$$

Korzystamy z jednorodności i Markowskości:

$$\rho(t+\delta t) = \sum_i K_i(\delta t)\,\rho(t)\,K_i^\dagger(\delta t)$$

(Krausy wciąż te same ....)

Rozwijamy w pierwszym rzędzie:

$$\rho(t) + \delta t\cdot X = \sum_i K_i(\delta t)\,\rho(t)\,K_i^\dagger(\delta t) + O(\delta t^2)$$

Żeby być $\rho(t)$ przynajmniej jeden Kraus musi być postaci:

$$K_0(\delta t) = \mathbb{1} - Y\delta t \qquad \begin{cases} Y = A + iH \\ A, B \text{ hermit.} \end{cases}$$

Wtedy $K_0\rho(t)K_0^\dagger = \rho(t) + \left(-Y\rho(t) - \rho(t)Y^\dagger\right)\delta t + O(\delta t^2)$

Zauważmy uwagę że więcej operatorów postaci $K_i = p_i\mathbb{1} - Y_i\,\delta t$ nic nowego nie wniesie, bo efektywnie tak jak $Y = \sum_i p_i Y_i$

Ale to jeszcze nie wszystko:

$$K_0^\dagger K_0 = \mathbb{1} - (Y + Y^\dagger)\delta t + O(\delta t^2) \neq \mathbb{1}$$

Możemy jednak wziąć $K_i = R_i\sqrt{\delta t} + \ldots \quad i \geq 1$

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1} - 2A\delta t + \sum_i R_i^\dagger R_i\,\delta t + O(\delta t^2)$$

Wszystko OK pod warunkiem że $A = \frac{1}{2}\sum_i R_i^\dagger R_i$

Czyli ostatecznie mamy

$$\rho(t+\delta t) - \rho(t) = \delta t\Big(\sum_i R_i\,\rho(t)\,R_i^\dagger - \tfrac{1}{2}\sum_i R_i^\dagger R_i\,\rho$$
$$- \tfrac{1}{2}\rho\sum_i R_i^\dagger R_i - i[H,\rho]\Big)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \sum_{i\geq 1}\left(R_i\rho R_i^\dagger - \tfrac{1}{2}R_i^\dagger R_i\rho - \tfrac{1}{2}\rho R_i^\dagger R_i\right)}$$

Postać Lindblada

Nie każde ewolucje podane za pomocą Krausów da się zapisać w postaci Lindblada

5. Dekoherencja

Przez dekoherencję rozumiemy sytuację w której układ kwantowy w wyniku oddziaływania z otoczeniem ewoluuje w taki sposób, że istnieje wymiar bazy w przestrzeni taki że wyrazy diagonalne macierzy gęstości pozostają nie zmienione natomiast wyrazy pozadiagonalne maleją do zera

$$\begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} & \rho_{02} \\ \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{20} & \rho_{21} & \rho_{22} \ldots \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \rho_{00} & & 0 \\ & \rho_{11} & \\ 0 & & \rho_{22} \ldots \end{bmatrix}$$

Nie przeżywają superpozycje stanów z wybranej bazy na końcu mamy mieszaninę stanów z różnymi prawdop.

<u>Przykład</u> Dwie szczeliny

$|0\rangle$

$|1\rangle$

$$|\psi\rangle_S = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$\rho = \begin{bmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{bmatrix}$$

Umieszczamy drugi układ fizyczny „urządzenie pomiarowe" przy górnym otworze, które jest w stanie $|0\rangle_E$ ale jeśli elektron leci górą zmienia swój stan na $|1\rangle_E$

$$|\psi\rangle_S|0\rangle_E = a|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|0\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad a|0\rangle|1\rangle + b|1\rangle|0\rangle$$

Zredukowana macierz gęstości

$$\rho_S = |a|^2|0\rangle\langle 0| + |b|^2|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{bmatrix}$$

Cząstka zachowuje się tak jakby z prawdopodobieństwem $|a|^2$ poszła górą a $|b|^2$ dołem. Tak jakby efektywnie „ktoś" wykonał pomiar.

Kwantowa superpozycja zniszczona.

1