Wykład 3 - nieoznaczonosc

18 października 2014
21:46

3. Zasada(y) nieoznaczoności Heisenberga.

- stand. zasada nieoznaczoności a relacja precyzja vs zaburzenie :

Na kwantach uczymy się innej zasady nieoznaczoności

Mając stan $|\psi\rangle$ definiujemy $\sigma_x = \sqrt{\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle^2}$

$\sigma_p = \sqrt{\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle}$

σ_x, σ_p – niepewności pędu i położenia w stanie

(A) $$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Czy to to samo co $\delta x \cdot d p_x \geq \frac{\hbar}{2}$?

Ogólniej:

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{|\langle[A, B]\rangle|}{2}$$

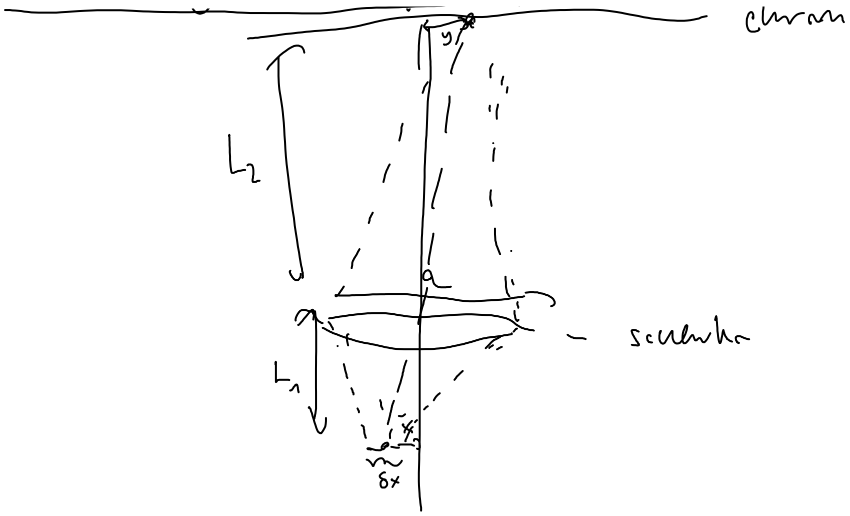
Zasada nieoznaczoności sformułowana przez Robertsona (1929)

nie ma mowy o „zaburzeniu" jednego przez drugi

Raczej myślimy o pomiarach $\hat{x}$ i $\hat{p}$ na osobnych egzemplarzach stanu $|\psi\rangle$.

Heisenberg chciał określić niemożliwe zaburzenie pędu związane z pomiarem położenia

Heisenberg Microscope



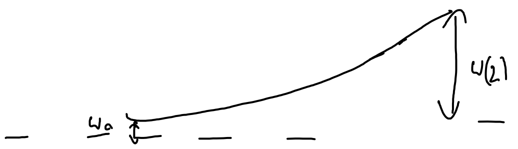
y możemy zmierzyć dowolnie dobrze $\frac{x}{L_1} = \frac{y}{L_2}$ $x = \frac{L_1}{L_2} y$

ale to nie znaczy że x znamy dokładnie, bo mamy wiązki światła a nie promienie:
Wiązka światła ogniskowana przez soczewkę o a na odległości L_1 będzie miała szerokość co najmniej $\frac{\lambda}{a}$ czyli $\delta x \approx \frac{\lambda}{a} L_1$. Nie znamy drogi którą leciał foton i jego składowa p_x będzie nieznana $dp_x \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{a}{2L_1}$

Dochodząc do wniosku:

(B) $\underbrace{\delta x}_{\text{niedokładność pomiaru}} \cdot \underbrace{dp_x}_{\text{disturbance}} \gtrsim h \quad \Big\{ \hbar, \frac{\hbar}{2}$

Dla wiązki Gaussowskiej:



$E \sim e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$

$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$ $\quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

Jeśli $z \gg z_R$

$w^2(z) = \frac{z^2 \lambda^2}{\pi^2 w_0^2}$ $\quad w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0} \cdot z$ ustawienia

$w_0 = \frac{2 \lambda z}{\pi w(z)}$ $\quad \Delta p = \frac{h}{\lambda} \frac{w(z) \cdot \frac{1}{2}}{2z}$ $\quad \Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$

Natomiast $\delta x = \frac{w_c}{2}$

Bardziej precyzyjnie: $\delta_x \, dp_{x_{..}} \geq \frac{\hbar}{2}$

Jak się mają równania (A) i (B) do siebie i czy w ogóle (B) jest poprawne?

Skrót rozumowania Heisenberga:

Wykonujemy pomiar z precyzją δx, po pomiarze nasz stan ma $\sigma_x = \delta x$. Czyli mamy prawo napisać

$$\delta x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

I jeśli utożsamimy σ_p z dp to mamy

$$\delta x \, d_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

trochę mętne i w ogóle nie zdefiniowaliśmy δx, dp ...

Żeby to wybronić trzeba było założyć

- $\delta x \ll \sigma_x^{\text{początkowe}} \Rightarrow \sigma_x = \delta x$
- $\sigma_p^{\text{początkowe}} \ll \sigma_p$ żeby móc powiedzieć że $dp = \sigma_p$
- A jeśli miałoby to działać dla dowolnych stanów to pod warunkiem że δx i dp są niezależne od stanu bo działa dla stanu o dobrze określonym pędzie.

- Trzy zasady nieoznaczoności ..

Ⓐ Jeśli chcemy przygotować stan o niskiej nieoznaczoności położenia to będzie miał wysoką nieoznaczoność pędu

$$\sigma_x \, \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ⓑ Im precyzyjniej mierzymy położenie tym bardziej zaburzamy pęd $\qquad \delta x \, \delta p \geq ? \cdot \hbar$

(C) Jeśli chcemy dokonać jednoczesnego pomiaru położenia i pędu: $\quad \delta x \, \delta p \geq ? \cdot \hbar$

Matematycznie:

(A)

$$\rho \;—\; \boxed{|x\rangle\langle x|} \;—\; X(x) = \mathrm{Tr}(\rho\, |x\rangle\langle x|), \quad \sigma_x$$

$$\rho \;—\; \boxed{|p\rangle\langle p|} \;—\; P(p) = \mathrm{Tr}(\rho\, |p\rangle\langle p|), \quad \sigma_p$$

sharp measurement

(B)

$$\rho \;—\; \boxed{\tilde{\Pi}_x} \;—\; \tilde{X}(x) = \mathrm{Tr}(\rho\, \tilde{\Pi}_x)$$

$$\rho_x \;—\; \boxed{\tilde{\Pi}_p} \quad \tilde{P}(p|x)\, \mathrm{Tr}(\tilde{\Pi}_p\, \rho_x)$$

$$J(x,p) = \mathrm{Tr}\Big(\tilde{\Pi}_p \cdot \sum_i K_x^i \rho K_x^{\dagger i}\Big)$$

(C)

$$\rho \;—\; \boxed{\tilde{\Pi}_{x,p}} \;—\; J(x,p) = \mathrm{Tr}(\rho\, \tilde{\Pi}_{x,p})$$

Widać, że (B) jest szczególnym przypadkiem (C).

Przeanalizujmy (C) i znajdźmy ograniczenia.

Łączny pomiar położenia i pędu

Definicja Pomiary Π_x, Π_p są łącznie mierzalne $\Leftrightarrow$ jeśli istnieje $\Pi_{x,p}$ t. że

$$\Pi_x = \int dp\, \Pi_{x,p}, \qquad \Pi_p = \int dx\, \Pi_{x,p}$$

Uwaga:

Jeśli Π_x, Π_p komutują to jest prosta sprawa

$\Pi_{x,p} = \Pi_x \Pi_p$ ... ok. Jeśli nie komutują

$\Pi_{x,p} = \Pi_x \cdot \Pi_p$ i ok. Jeśli nie komutują to tak się nie da – nie hermitowski, nie dodatni operator..
np. dla $\Pi_x' = |x\rangle\langle x|$ i $\Pi''_p = |p\rangle\langle p|$ nie da się

<u>Definicja</u> Rozmazane operatory położenia i pędu

$$\tilde{\Pi}_x = \int dx' \, \mu(x-x') \, |x'\rangle\langle x'|$$

$$\tilde{\Pi}_p = \int dp' \, \nu(p-p') \, |p'\rangle\langle p'|$$

μ, ν - f. rozsmarowujące np. Gaussy

Czy jeśli odpowiednio rozsmarowanie to da się znaleźć $\Pi_{x,p}$ t.że będzie to pomiar łączny dla $\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_p$.

<u>Przykład</u>

$$\Pi_{x,p} = \frac{1}{2\pi\hbar} D(x,p) \hat{\Pi}_0 D^\dagger(x,p)$$

$$D(x,p) = e^{\frac{ix\hat{p} - ip\hat{x}}{\hbar}}$$

op. Weyla (przesunięcia)

$$\Pi_x = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \quad D(x,p) \hat{\Pi}_0 D^\dagger(x,p)$$

$$\Pi_p = \text{--''--} \int dx \quad \text{--''--}$$

Obliczmy rozkłady prawdopodobieństwa

$$\tilde{X}(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \operatorname{Tr}\left(dp \quad \hat{\rho} \, D(x,p) \hat{\Pi}_0 \, D^\dagger(x,p) \right)$$

$$\hat{\Pi}_0 = \int dx' dx'' \, \Pi_0(x',x'') \, |x'\rangle\langle x''|$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \operatorname{Tr}\left(\int dp \quad \hat{\rho} \, e^{-\frac{ip\hat{x}}{\hbar}} \int dx' dx'' \, \Pi_0(x',x'') \, |x'+x\rangle\langle x''+x| \, e^{\frac{ip\hat{x}}{\hbar}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \operatorname{Tr}\left(\hat{\rho} \int dp \, dx' dx'' \, \Pi_0(x',x'') \, e^{ip(x''-x')} \, |x'+x\rangle\langle x''+x| \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\hat\rho \int dx' \, X_{\Pi_0}(x') \, |x'+x\rangle\langle x'+x|\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho \underbrace{\int dx' \, X_{\Pi_0}(x'-x)\, |x'\rangle\langle x'|}_{\Pi_x}\right)$$

rozsmarowany operator położenia

$$\tilde{X}(x) = \int dx' \, X_\rho(x') \, X_{\Pi_0}(x'-x)$$

$$\tilde{P}(p) = \int dp' \, P_\rho(p') \, P_{\Pi_0}(p'-p)$$

Jeśli za miarę niedokładności pomiaru przyjmiemy to wariancje rozsmarowującego rozkładu: to

$$\delta x = \sigma_x(\Pi_0)$$ i wtedy dostajemy

$$\delta p = \sigma_p(\Pi_0)$$

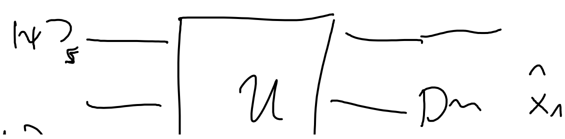
$$\delta x \, \delta p = \sigma_x(\Pi_0)\, \sigma_p(\Pi_0) \geq \frac{\hbar}{2}$$

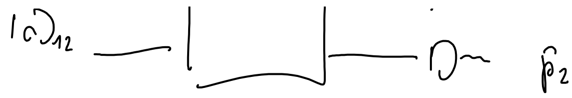
Będzie wysycone jeśli rozkłady Gaussa. .
To jest dodatkowy szum jeśli jest dodawany do wyników pomiarów przez niedokładność występującą w samym stanie już wcześniej.

Model pomiaru jednoczesnego $\hat{x}$ i $\hat{p}$

Trzy cząstki $\hat{x}_s, \hat{p}_s$, $\hat{x}_1, \hat{p}_1$, $\hat{x}_2$ $\hat{p}_2$

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{x}_s \hat{p}_1 - \hat{p}_s \hat{x}_2\right)}$$





Przewidujmy obserwable $\hat{x}_1, \hat{p}_2$ w obrazie Heisenberga

Potrzebujemy tylko $\hat{x}_1^{out} = U^\dagger \hat{x}_1 U = \hat{x}_S + \overbrace{x_1 - \frac{1}{2} x_2}^{x_M}$

$$\hat{p}_2^{out} = U^\dagger p_2 U = p_S + \overbrace{\hat{p}_2 - \frac{1}{2} p_1}^{p_M}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}(q_S p_1 - p_S q_2)} q_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(q_S p_1 - p_S q_2)} = q_1 + q_S - \frac{1}{2} q_2 \qquad \text{ok}$$

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \dots$$

Obliczmy teraz $\delta^2 x_1^{out} \delta^2 p_2^{out} =$

{ Liczymy ${}_{12}\langle 0 | x_M | 0_{12} \rangle = {}_{12}\langle 0 | p_M | 0 \rangle_{12} = 0 \Rightarrow \langle x_1^{out} \rangle = \langle x_S \rangle$

$$\langle x_1^{out\,2} \rangle - \langle x_1^{out} \rangle^2 = \sigma_x^2(\psi) + \sigma_{x_M}^2(|0\rangle_{12})$$

$$\delta^2 x_1^{out} \delta^2 p_2^{out} = \Big[\sigma_x^2(|\psi\rangle) + \underbrace{\sigma_{x_M}^2(|0\rangle_{12})}_{\delta^2 x}\Big]\Big[\sigma_p^2(|\psi\rangle) + \underbrace{\sigma_{p_M}^2(|0\rangle_{12})}_{\delta^2 p}\Big]$$

$$\geq \hbar^2$$

Żeby mierzymy dokładny szum to musimy wziąć stan o minimalnych szumach x_M i p_M.

$$\delta x \, \delta p = \frac{\hbar}{2}$$

i wtedy w pomiarach Taczych możemy nie mniej

mieć szansę zaobserwowania

$$\delta x \, \delta p = \hbar$$

4. Kwantowy efekt Zenona

Rozważmy układ w stanie początkowym $|0\rangle$

ewoluujący zgodnie z hamiltonianem H

$-iH \cdot t$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH\cdot t}|0\rangle =$$

$$= a_0(t)|0\rangle + \sum_{i>0} a_i(t)|i\rangle$$

Mierzymy układ w bazie $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \ldots$
Prawdop. że pozostanie w stanie początkowym:

$$p_0 = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle 0| e^{-iHt}|0\rangle|^2$$

Dla krótkich t możemy rozwinąć:

$$p_0 = \langle 0| 1 - iHt - \frac{H^2t^2}{2}|0\rangle \langle 0| 1 + iHt - \frac{H^2t^2}{2}|0\rangle$$

$$= 1 - it\langle H\rangle + it\langle H\rangle + \langle H\rangle^2 t^2 - t^2\langle H^2\rangle + O(t^4)$$

$$= 1 - t^2 \Delta^2 H + O(t^4)$$

Podzielmy pomiar N krotnie w czasie t
Jakie jest prawdop. że pozostanie w stanie $|0\rangle$

$$p_0^{(N)} \approx \left(1 - \left(\frac{t}{N}\right)^2 \Delta^2 H + O\left(\left(\frac{t}{N}\right)^4\right)\right)^N \approx$$

$$\approx 1 - \frac{t^2}{N}\Delta^2 H \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

Stan nie ewoluuje, częsty pomiar „zamraża" go w stanie początkowym
„Ruch jest złudzeniem" ...