Wyklad 6 - bayesowskie

2 listopada 2014
14:41

3. Podejście Bayesowskie

dotychczas myśleliśmy tak: $p_\theta(x)$

pewien określony nieznany parametr

i mówiliśmy o rodzinie rozkładów prawdopodobieństwa

teraz myślimy tak $p(x|\theta)$

a θ jest zmienną losową z pewnym rozkładem a priori $p(\theta)$. Zalecane podejście jeśli chcemy polepszyć estymację wykorzystując wiedzę a priori albo gdy nie potrafimy znaleźć opt. estymatorów (nie istnieją...) w podejściu klasycznym

3.1 Optymalny estymator Bayesowski

W podejściu klasycznym minimalizowaliśmy:

$\Delta^2\tilde{\theta} = \int dx\, (\tilde{\theta}(x)-\theta)^2 p_\theta(x)$ i wymagaliśmy nieobciążoności estymatora

W podejściu Bayesowskim minimalizujemy średnią wariancję:

$$\Delta^2\tilde{\theta} = \int dx\, d\theta\, (\tilde{\theta}(x)-\theta)^2 \underbrace{p(x|\theta)\, p(\theta)}_{p(x,\theta)}$$

Korzystając z wzoru Bayesa $p(x,\theta)=p(\theta|x)\,p(x)$:

$$= \int \left[\int d\theta \left(\tilde{\theta}(x)-\theta\right)^2 p(\theta|x)\right] p(x)\, dx$$

Ponieważ $p(x)\geq 0$ szukanie optymalnego estymatora oznacza znalezienie dla każdego x takiego $\tilde{\theta}(x)$ który minimalizuje $\int dx\, (\tilde{\theta}(x)-\theta)^2 p(\theta|x)$

$$\frac{d}{d\tilde{\theta}}\int d\theta \left(\tilde{\theta}-\theta\right)^2 p(\theta|x) = \int d\theta\, 2(\tilde{\theta}-\theta)\, p(\theta|x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\theta} = \int d\theta\, \theta\, p(\theta|x)$$

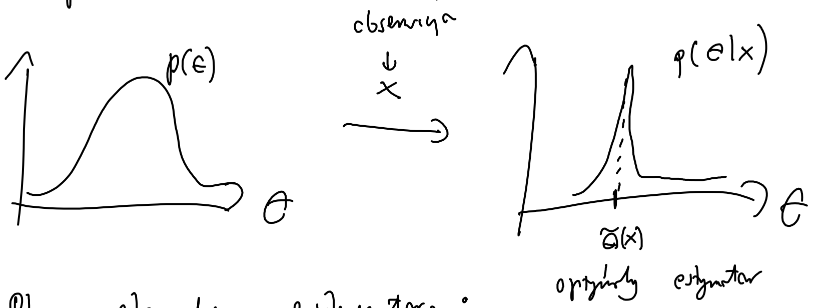
$$\tilde{\Theta} = \int d\Theta\, \Theta\, p(\Theta|x)$$

Optymalny estymator: Bayesowski ;

$$\boxed{\tilde{\Theta}(x) = \langle \Theta \rangle_{p(\Theta|x)}}$$

wartość oczekiwana rozkładu a posteriori

$$\underbrace{p(\theta|x)}_{\text{a posteriori}} = \frac{p(x,\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)\,\overbrace{p(\theta)}^{\text{a priori}}}{p(x)}$$



Dla optymalnego estymatora:

$$\delta^2 \tilde{\Theta} = \int dx\, d\Theta \left(\Theta - \tilde{\Theta}(x)\right)^2 p(\Theta|x)\, p(x)\, dx =$$

$$= \int dx \left(\int d\theta \left(\theta - \langle \theta \rangle_{p(\theta|x)} \right)^2 p(\theta|x) \right) p(x)\, dx$$

$$= \int dx\, \delta^2 \Theta\big|_{p(\theta|x)}\, p(x)\, dx$$

Intuicja:

W ogólności $\delta\tilde{\Theta}$ będzie zależeć od wiedzy a priori ale im więcej danych tym wpływ wiedzy a priori słabszy:

$$p(\theta|x) \propto \underset{\substack{\text{szybko zmienne}\\ \text{z } \theta}}{p(x|\theta)}\ \underset{\substack{\text{wolno zmienne}\\ \text{z } \theta}}{p(\theta)} \simeq p(x|\theta)$$

Jeśli danych mało estymator będzie dociągany w kierunku średniej rozkładu a priori.

największy problem podejścia Bayesowskiego: to wybór rozkładu a priori!

Uwaga:

ponieważ mamy dane $p(x|\theta)$, $p(\theta)$, aby obliczyć $p(\theta|x)$ musimy obliczyć $p(x) = \int d\theta\, p(x|\theta)\, p(\theta)$

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\; p(\theta)}{\int d\theta'\, p(x|\theta')\, p(\theta')}$$

Nie zawsze łatwo wyliczyć całkę, ale wyrażenie w mianowniku to po prostu normalizacja rozkładu $p(\theta|x)$, bo nie zależy od θ.

Przykład

$$x_i \sim N(\theta, \sigma^2) \qquad i = 1 \ldots N$$

$$p(x|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - \theta)^2}$$

Weźmy gaussowski rozkład a priori

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}(\theta - \mu_\theta)^2}$$

średnia a priori

$$p(x|\theta) \cdot p(\theta) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\overbrace{\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_i (x_i - \theta)^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}(\theta - \mu_\theta)^2\right]}^{G(\theta)}}$$

Rozkład a posteriori:

$$p(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}G(\theta)}}{\int d\theta'\, e^{-\frac{1}{2}G(\theta')}\, d\theta'}$$

Przepiszmy $G(\theta)$:

$$G(\theta) = \theta^2\left(\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right) - 2\theta\left(\frac{N\bar{x}}{\sigma^2} + \frac{\mu_\theta}{\sigma_\theta^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}\sum_i x_i^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\mu_\theta^2$$

to nie zależy od θ
więc się skróci

Możemy dodawać i odejmować człony niezależne od θ

Zdefiniujmy
$$\sigma_{\theta|x}^2 = \frac{1}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}}$$

$$\mu_{\theta|x} = \left(\frac{N}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{\mu_\theta}{\sigma_\theta^2}\right)\sigma_{\theta|x}^2$$

Wtedy z dokładnością do członów nie zależnych od θ

$$G(\theta) = \frac{1}{\sigma_{\theta|x}^2}\left(\theta - \mu_{\theta|x}\right)^2 + \ldots$$

Czyli:

$$p(\theta|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\theta|x}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\theta|x}^2}\left(\theta - \mu_{\theta|x}\right)^2}$$

Rozkład a posteriori też gaussowski (pamiętamy wcześniej nie było problemów)

Widzimy że jego wariancja

$$\sigma_{\theta|x}^2 = \frac{1}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}}$$

będzie tym węższa im więcej prób a wpływ rozkładu a priori będzie maleć im większe N. Średnia z kolei

$$\mu_{\theta|x} = \left(\frac{N}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{\mu_\theta}{\sigma_\theta^2}\right)\sigma_{\theta|x}^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{N}{\sigma^2}}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}}}_{\alpha}\bar{x} + \underbrace{\frac{\frac{1}{\sigma_\theta^2}}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}}}_{1-\alpha}\mu_\theta =$$

$$= \alpha \cdot \bar{x} + (1-\alpha)\mu_\theta$$

wkład od danych

dążenie do średniej a priori

danych   dominuje
                      ze średnią a priori

Dla dużych N rozkład a priori nie ma znaczenia
: $\alpha \to 1$, im α bliższe 0 tym większy
wpływ rozkładu a priori.

. Dla tego problemu optymalny estymator
jest trywialny do znalezienia (średnia a posteriori)

$$\tilde{\theta}(x) = \mu_{\theta|x}$$

A średnia wariancja estymatora

$$\Delta^2\tilde{\theta} = \int dx\, \Delta^2\theta|_{p(\theta|x)}\, p(x) = \int dx\, \sigma^2_{\theta|x}\, p(x) = \frac{1}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}$$

W granicy $N \to \infty$ $\quad \tilde{\theta}(x) = \bar{x} \quad \Delta^2\tilde{\theta} = \frac{\sigma^2}{N}$

Przyjemnie jest pracować z rozkładami a priori
dla których a posteriori także dla liczenia
całkowania itp. Tak jest dla gaussowskich
rozkładów a priori i gaussowskich procesów

3.2

3.3 Bayesian Cramer-Rao bound + bernstein von Mises etc....

Jak się liczy miary precyzji Bayesowskiej
. precyzja przez informację Fishera.

Wyprowadźmy analog nierówności C-R dla precyzji Bayesowskiej:

$$\Delta^2\tilde{\theta} = \int dx\, d\theta\; p(x|\theta)\, p(\theta) \left(\tilde{\theta}(x) - \theta\right)^2 = \int dx\, d\theta\; f^2(x,\theta)$$

$$f(\theta, x) = \sqrt{p(x|\theta)\, p(\theta)} \cdot \left(\tilde{\theta}(x) - \theta\right)$$

Zdefiniujmy:

$$g(\theta, x) = \sqrt{\frac{p(\theta)}{p(x|\theta)}}\frac{dp(x|\theta)}{d\theta} + \sqrt{\frac{p(x|\theta)}{p(\theta)}}\frac{dp(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{p(x|\theta)p(\theta)}}\frac{dp(x|\theta)p(\theta)}{d\theta}$$

$$\int g(\theta,x)^2 d\theta dx = \int d\theta dx \frac{p(\theta)}{p(x|\theta)}\left(\frac{dp(x|\theta)}{d\theta}\right)^2 + \frac{p(x|\theta)}{p(\theta)}\left(\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right)^2$$

$$\underbrace{+\int 2\frac{dp(x|\theta)}{d\theta}\frac{dp(\theta)}{d\theta}}_{0} = \underbrace{\int p(\theta)d\theta F_\theta}_{F} + \underbrace{\int d\theta \frac{1}{p(\theta)}\left(\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right)^2}_{I}$$

$$\int p(\theta,x)\, g(\theta,x) = \int p(\theta)\left(\tilde{\theta}(x)-\theta\right)\frac{dp(x|\theta)}{d\theta} + p(x|\theta)\left(\tilde{\theta}(x)-\theta\right)\frac{dp(\theta)}{d\theta}$$

$$= \int \left(\tilde{\theta}(x)-\theta\right)\frac{d\left(p(x|\theta)p(\theta)\right)}{d\theta} = \underbrace{\int \tilde{\theta}(x)\frac{dp(x)}{d\theta}}_{0} - \int \theta \frac{dp(\theta)}{d\theta}$$

$$= \underbrace{-\theta\, p(\theta)\Big|_{\theta_-}^{\theta_+}}_{0} + \int p(\theta)d\theta = 1$$

zakładamy że na brzegach znika $p(\theta)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta^2\tilde{\theta}_B \geq \frac{1}{F + I}}$$

wkład Fisher — wkład od wiedzy a priori

Przykład

$$x_i \sim N(\theta, \sigma^2) \qquad i = 1 \dots N$$

$$p(x|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i-\theta)^2}$$

Weźmy gaussowski rozkład a priori

$$p(\theta) = \frac{1}{\dots} e^{-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}(\theta-\mu_\theta)^2}$$

$$p(\theta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} e$$

↑ średnia a priori

$$F = N \cdot \frac{1}{\sigma^2}$$

$$I = \int \sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}\, e^{+\frac{1}{2\sigma_\theta^2}(\theta-\mu_B)^2} \frac{(\theta-\mu_B)^2}{\sigma_\theta^4} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\theta^2}(\theta-\mu_B)^2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_\theta^2}$$

$$\Delta^2\tilde{\theta} \geq \frac{1}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\theta^2}}$$

Widzimy że dla nawiasowego przykładu mamy wysycenie bo wcześniej uzyskaliśmy równość ogólnie tylko wtedy mamy wysycenie θ..

Bernstein-von-Mises theorem

(tak naprawdę w pewnym szczególnym przypadku)

Przy pewnych założeniach o regularności $p(\theta)$, $p(x|\theta)$

Dla N powtórzeń eksperymentu $(x_1 \dots x_N)$, estymujemy średnią rozkładu $\tilde{\theta}(\vec{x}) = \int d\theta\, p(\theta|x_1 \dots x_N)\,\theta$

i $\tilde{\theta}$ dąży do Gaussa skupionego wokół prawdziwej wartości:

$$\sqrt{N}\left(\tilde{\theta}_B - \theta_c\right) \xrightarrow{N\to\infty} N\left(0, \frac{1}{\tilde{F}_{\theta_c}}\right)$$

Nie ma znaczenia prior...