

2. Kwantowa estymacja Bayesowska

$\mathcal{S}_\theta$, ale przyjmujemy rozkład a priori $p(\theta)$

Stworzyliśmy pomiar $\{\pi_x\}$: estymator $\tilde{\theta}(x)$, minimizujący średni koszt:

$$\bar{C} = \int d\theta p(\theta) \int dx \text{Tr}(\mathcal{S}_\theta \pi_x) C(\theta, \tilde{\theta}(x))$$

np. $C(\theta, \tilde{\theta}(x)) = (\theta - \tilde{\theta}(x))^2$ wtedy $\bar{C} = \Delta^2 \tilde{\theta}$

W klasycznej estymacji kiedy $p(x|\theta)$ było ustalone opt. estymator zawsze było prosto zapisać

$$\begin{cases} \bar{C} = \int dx \left(\int d\theta p(\theta|x) C(\theta, \tilde{\theta}) \right) p(x) \\ \text{tzn. należy } \frac{d}{d\tilde{\theta}} \int d\theta p(\theta|x) C(\theta, \tilde{\theta}) = 0 \Rightarrow \tilde{\theta}(x) = \dots \\ \text{np. dla } C(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta - \tilde{\theta})^2 \Rightarrow \tilde{\theta}(x) = \int d\theta p(\theta|x) \end{cases}$$

Jaka reakcja opt. pomiarów?

Nie mamy pewności, że nasze ograniczenie są do pomiarów rzeczywistych. Czyli $\{\pi_x\}$ ogólny POVM, w ogólności mieszające wiele operatorów...

Ogólny estymator + pomiar = ogólny pomiar

Skoro $\tilde{\theta}(x)$ - estymator to możemy numerować nasz op. pomiarowe przez estymowane wartości parametrów:

$$\{\pi_x\} \longrightarrow \{\pi_{\theta'}\} \quad \pi_{\theta'} = \int dx \pi_x \delta(\theta' - \tilde{\theta}(x))$$

i otrzymuje:

$$\bar{C} = \int d\theta p(\theta) \int d\theta' \text{Tr}(\mathcal{S}_\theta \pi_{\theta'}) C(\theta, \theta')$$

Dalej zamiast θ' będziemy pisać $\tilde{\theta}$ żeby przypomnieć że ten indeks ma być nasz estymator

$$\bar{C} = \int d\theta d\tilde{\theta} p(\theta) \text{Tr}(\mathcal{S}_\theta \pi_{\tilde{\theta}}) C(\theta, \tilde{\theta})$$

$$\bar{C} = \int d\theta d\tilde{\theta} p(\theta) \text{Tr}(\mathcal{S}_\theta \Pi_{\tilde{\theta}}) C(\theta, \tilde{\theta})$$

$$\min_{\{\Pi_{\tilde{\theta}}\}} \bar{C}, \quad \Pi_{\tilde{\theta}} \geq 0, \quad \int d\tilde{\theta} \Pi_{\tilde{\theta}} = \mathbb{I}$$

Bayesowski problem estymacji kwantowej

W ogólnym problem b. trudny do rozwiązania

ale jeśli mamy pewne symetrie....

2.1. Kwant kwadratury

Wtedy $C(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta - \tilde{\theta})^2$ i spróbujmy znaleźć $\min \bar{C}$ i optymalny pomiar.

$$\bar{C}_{\tilde{\theta}} = \int d\theta d\tilde{\theta} p(\theta) \text{Tr}(\mathcal{S}_\theta \Pi_{\tilde{\theta}} (\theta^2 + \tilde{\theta}^2 - 2\theta\tilde{\theta})) =$$

$$= \underbrace{\int d\theta p(\theta) \theta^2}_{\mathcal{S}^2 \theta} + \text{Tr} \underbrace{\left(\int d\theta p(\theta) \mathcal{S}_\theta \right)}_{\bar{\mathcal{S}}} \underbrace{\int d\tilde{\theta} \Pi_{\tilde{\theta}} \tilde{\theta}^2}_{\bar{\Lambda}_2}$$

$$- 2 \text{Tr} \underbrace{\left(\int d\theta p(\theta) \mathcal{S}_\theta \theta \right)}_{\bar{\mathcal{S}}'} \underbrace{\int d\tilde{\theta} \Pi_{\tilde{\theta}} \tilde{\theta}}_{\bar{\Lambda}_1} =$$

$$= \mathcal{S}^2 \theta + \text{Tr}(\bar{\mathcal{S}} \bar{\Lambda}_2) - 2 \text{Tr}(\bar{\mathcal{S}}' \bar{\Lambda}_1)$$

Stąd min po $\{\Pi_{\tilde{\theta}}\}$.

Przyjmijmy na razie bez dowodu, że optymalny pomiar musi być czysto kwantowy. (Dowód później)

$$\Pi_{\tilde{\theta}_i} = |\tilde{\theta}_i\rangle \langle \tilde{\theta}_i| \quad \text{gdzie } |\tilde{\theta}_i\rangle \text{ ortogonalne wektory}$$

wektorów

$$\sum_i \Pi_{\tilde{\theta}_i} = \mathbb{I}, \quad \tilde{\theta}_i - \text{estymowane wartości}$$

$$\text{Wtedy } \bar{\Lambda}_2 = \sum_i |\tilde{\theta}_i\rangle \langle \tilde{\theta}_i| \tilde{\theta}_i^2 = \bar{\Lambda}_1^2$$

$$\text{Oznaczymy } \bar{\Lambda} := \bar{\Lambda}_1, \quad \bar{\Lambda}_2 = \bar{\Lambda}^2$$

$$\bar{C}_{\tilde{\theta}} = \mathcal{S}^2 \theta + \text{Tr}(\bar{\mathcal{S}} \bar{\Lambda}^2) - 2 \text{Tr}(\bar{\mathcal{S}}' \bar{\Lambda})$$

I szukamy min po $\bar{\Lambda}$ - dowodem naszym hermitowsko.

Funkcja do minimizowania:

$$\bar{C}_{\tilde{\theta}} = \mathcal{S}^2 \theta + \sum_{i,j} \bar{\mathcal{S}}_{ij} \bar{\Lambda}_{ii} \bar{\Lambda}_{jj} - 2 \sum_i \bar{\mathcal{S}}'_{ii} \bar{\Lambda}_{ii}$$

$$\Delta^2 \tilde{\theta} = \Delta^2 \theta + \sum_{kij} \bar{S}_{ki} \bar{\Lambda}_{ij} \bar{\Lambda}_{jk} - 2 \sum_{ij} \bar{S}_{ji} \bar{\Lambda}_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^R + i \Lambda_{ij}^I, \quad i < j \\ \frac{\partial \Delta^2 \tilde{\theta}}{\partial \Lambda_{ij}^R} = \sum_k \bar{S}_{ki} \bar{\Lambda}_{jk} + \sum_k S_{jk} \bar{\Lambda}_{ki} - 2 \bar{S}_{ji} = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2 \tilde{\theta}}{\partial \Lambda_{ij}^I} = i (-1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\bar{\Lambda} \bar{S} + \bar{S} \bar{\Lambda} - 2 \bar{S} = 0$$

$$\frac{1}{2} (\bar{\Lambda} \bar{S} + \bar{S} \bar{\Lambda}) = \bar{S} \quad \text{Wiemek nie } \bar{\Lambda}$$

Być może $\bar{\Lambda}$ optymalny koszt:

$$\Delta^2 \tilde{\theta} = \Delta^2 \theta - \text{Tr}(\bar{S} \bar{\Lambda}^2)$$

$$\frac{1}{2} (\bar{\Lambda} \bar{S} + \bar{S} \bar{\Lambda}) = \bar{S}$$

Czy to coś przypomina?

$$\text{Gdyby } \bar{S}^{-1} \stackrel{!}{=} \frac{d\bar{S}}{d\theta} \dots$$

Gausowski niedługo a prami:

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\bar{S}^{-1} = \int d\theta p(\theta) \left| \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} S_\theta = \int d\theta \left. \frac{d}{d\theta} p(\theta) \right|_{\theta=\theta_0} S_\theta \cdot \sigma^2$$

$$= \sigma^2 \left. \frac{d}{d\theta} \left(\int d\theta p(\theta) S_\theta \right) \right|_{\theta=\theta_0} = \sigma^2 \frac{d\bar{S}_\theta}{d\theta_0}$$

presumacja średniej, stan 2 presumacji
średniej a prami i

A w tej sytuacji

$$\frac{1}{2} (\bar{\Lambda} \bar{S} + \bar{S} \bar{\Lambda}) = \Delta^2 \theta \frac{d\bar{S}_{\theta_0}}{d\theta_0}$$

Czyli $\bar{\Lambda} = \Delta^2 \theta$
 $\uparrow$
 $\hat{L}_{SLD}$ dla problemu gda

Mamy $\bar{S}_0$ i pomiar Θ_0 .

$$\text{czyli } \text{Tr}(\bar{S} \bar{\Lambda}^2) = (\delta^2 \Theta)^2 F_{\Theta_0}(\bar{S}_{\Theta_0})$$

$$\bar{\Delta}^2 \tilde{\Theta} = \delta^2 \Theta \left[1 - \delta^2 \Theta F_{\Theta_0}(\bar{S}_{\Theta_0}) \right]$$

Praktycznie kwantowe Bayes i
kwantowe Fiskera...

Należy pamiętać, że nie jest to samo
co Feynman... jest to pewien rodzaj kwantowej Fiskera

ale nie jest to kwantowa Fiskera...

☐ - jeden qubit jest kwantowy.

Dzięki temu możemy optymalizować

$$\text{Różnica między } \Pi_{\tilde{\Theta}} \text{ i } L_1 = \int d\tilde{\Theta} \Pi_{\tilde{\Theta}} \tilde{\Theta}.$$

Niech $\tilde{\Theta}_i$, $|\tilde{\Theta}_i\rangle$ będą wekt. i wekt. własnymi L_1 .

$$L_1 = \sum_i \tilde{\Theta}_i |\tilde{\Theta}_i\rangle \langle \tilde{\Theta}_i| = L_1^{\text{mi}}$$

Polećmy w zadanym stanie $\{\Pi_{\tilde{\Theta}_i}, \tilde{\Theta}_i\}$ stany

$\{|\tilde{\Theta}_i\rangle \langle \tilde{\Theta}_i|, \tilde{\Theta}_i\}$ nie ma trudem.

$$L_2^{\text{mi}} = \sum_i \tilde{\Theta}_i^2 |\tilde{\Theta}_i\rangle \langle \tilde{\Theta}_i| = L_1^2$$

Mamy problem z:

$$\forall \text{ } \text{Tr}(S L_1^2) \leq \text{Tr}(S L_2)$$

Wystaw problem z

$$L_2 - L_1^2 \geq 0 \text{ czyli}$$

$$\int d\tilde{\Theta} \Pi_{\tilde{\Theta}} \tilde{\Theta}^2 - \left(\int d\tilde{\Theta} \Pi_{\tilde{\Theta}} \tilde{\Theta} \right)^2 \geq 0$$

Alle to wynika z tego że x^2
jest operatorem wypukłym. (czyli operatorem)

2.2 Problem z symetrią

Niech G pewna grupa, np. $U(1)$, $SO(2)$,...

Tym co będziemy estymować będą elementy grupy $g \in G$

Tym co będziemy estymować będą elementy grupy $g \in G$
 np. para albo grupy $U(1)$, albo $SO(2), \dots$
 Niek U_g oznaczamy jako reprezentację unitarną
 grupy G : $U_g, U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$

Ważności:

a) $S_g = U_g S_e U_g^\dagger$ - normalizacja
 generowania przez
 ustalony stan repr. grupy

np. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}|\downarrow\rangle) = \underbrace{e^{i\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}_{U_\varphi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)}_{|\psi_0\rangle}$
 repr. grupy $U(1)$

b) $\forall_{g_1, g_2} C(g_1, g_2) = C(hg_1, hg_2)$
 p. k. i. t. n. lew. mierzalności względem
 dzierżonici grupy

np. $C(\varphi_1, \varphi_2) = C(\varphi_1 - \varphi_2) = C((\varphi_1 + \pi) - (\varphi_2 + \pi))$
 mierzalność względem
 dzierżonici $U(1)$

c) mierzalność apriory mierzalności względem dzierżonici
 grupy

$\forall_{g, h} dg p(g) = d(hg) p(hg)$

np. $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$: $d\varphi \frac{1}{2\pi} = \underbrace{d(\varphi + 2\pi)}_{d\varphi} \frac{1}{2\pi}$
 transj. nie zmienia
 wartości.

• $d\theta d\varphi p(\theta, \varphi)$ jak musi być
 $p(\theta, \varphi)$ żeby
 było miarą mierzalną
 na płaszczyźnie.

$p(\theta, \varphi) \geq 0$
 Czyli ujemna miara:

$\frac{1}{4\pi} d\theta d\varphi \sin \theta = d\mu_{S^2}$

Ogólnie $dg p(g) = d\mu_g$ - miara Haar

Ostateczny warunek dg będący miarą na
 grupie mierzalności Haar ujemna $\int_G dg = 1$

Czyli w tej sytuacji $p(g) = 1$.

Średni koszt dla problemów z symetrią:

$$\bar{C} = \int dg d\tilde{g} \underset{\substack{\uparrow \uparrow \\ \text{miary Haar na} \\ \text{grupy } G}}{\text{Tr}(U_g \tilde{g}^\dagger \tilde{T}_g)} C(g, \tilde{g})$$

2.3 Pomiar kowariantny

Definicja

$\{\tilde{T}_g\}$ mający kowariantny względem grupy $G \Leftrightarrow \forall_{g,h} U_h \tilde{T}_g U_h^\dagger = \tilde{T}_{hg}$

Wniosek:

Jżeli $\{\tilde{T}_g\}$ jest kowariantny to

$$\tilde{T}_g = U_g \tilde{T}_e U_g^\dagger$$

Innymi słowy pomiar kowariantny w pełni określony przez działanie jednego operatora $\tilde{T}_e$

Twierdzenie

Jestli problem optymalnej RAG-miki ma symetrię

względ grupy G

(dg - miara Haar, $C(hg, hg') = C(g, g')$, $S_g = U_g S_e U_g^\dagger$)

Optymalny pomiar mać zawsze znaleźć

pośród pomiarów kowariantnych względ grupy G

Dowód

Niech $\tilde{T}_g^{\text{opt}}$ będzie optymalnym pomiarowym minimalizującym $\bar{C}$:

$$C_{\min} = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\tilde{T}_g^{\text{opt}} S_g) C(g, \tilde{g})$$

2 delimitation

2. definierung

$$\Pi_{\tilde{g}}^{cv} = \int dg' U_{g'}^+ \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'}$$

Pc. prüfen wir $\Pi_{\tilde{g}}^{cv}$ ist kovariant :

$$U_h \Pi_{\tilde{g}}^{cv} U_h^\dagger = \int dg' U_h U_{g'}^{-1} \Pi_{g'h\tilde{g}}^{opt} U_{g'h^{-1}}$$

$$\stackrel{g' \rightarrow g'h}{=} \int dg' U_{g'} \Pi_{g'h\tilde{g}}^{opt} U_{g'} = \Pi_{h\tilde{g}}^{cv}$$

Pc. zeigen die beiden sind gleich zu $\Pi_{\tilde{g}}^{opt}$:

$$\begin{aligned} C_{cv} &= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\Pi_{\tilde{g}}^{cv} S_g) C(g, \tilde{g}) = \\ &= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\int dg' U_{g'}^+ \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'} U_g S_g U_g^\dagger) C(g, \tilde{g}) \end{aligned}$$

$$= \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(U_{g'}^+ \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'} S_g) C(g, \tilde{g})$$

$$\begin{cases} g \rightarrow g'^{-1} g \\ \tilde{g} \rightarrow g'^{-1} \tilde{g} \end{cases}$$

$$= \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(U_g^+ \Pi_{\tilde{g}}^{opt} U_g S_g) F(g'^{-1} g, g'^{-1} \tilde{g}) =$$

$$= \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(\Pi_{\tilde{g}}^{opt} S_g) F(g, \tilde{g}) = F_{opt}$$



Problem manny. wie approximiert

$$\bar{C} = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\Pi_{\tilde{g}} S_g) C(g, \tilde{g}) =$$

$$= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^\dagger U_g S_g U_g^\dagger) C(g, \tilde{g})$$

$$= \int dg d\tilde{g} (\text{Tr}(U_{\tilde{g}}^\dagger \Pi_e U_{\tilde{g}} S_g) C(g, \tilde{g}))$$

$$\begin{cases} g \rightarrow \tilde{g} g \end{cases}$$

$$= \int dg d\tilde{g} \operatorname{Tr}(U_g^\dagger \Pi_e U_g S_e) F(g, e)$$

$$C = \int dg \operatorname{Tr}(\Pi_e S_g) F(g, e)$$

Kanonic problem

$$C = \int dg \operatorname{Tr}(\Pi_e S_g) C(g, e)$$

$$\min_{\Pi_e \geq 0} \bar{C}, \quad \int dg U_g \Pi_e U_g^\dagger = \mathbb{I}$$

minimizacja dla U_g
po jednym -operatacie!

2.4. Optymalizacja dla qubitów
na równoległym sprzężeniu Blocha mając N kopii

$$S_\varphi^{(N)} = |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|^{\otimes N} \quad |\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) = \underbrace{U_\varphi}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$S_\varphi^{(N)} = U_\varphi^{\otimes N} S_0^{(N)} U_\varphi^{\otimes N \dagger} \quad S_0^{(N)} = \left[\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|) \right]^{\otimes N}$$

$$C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4 \sin^2\left(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}\right) \quad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\bar{C}^{(N)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \operatorname{Tr}(\Pi_0^{(N)} S_\varphi^{(N)}) 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$\bar{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Tr}(\Pi_0^{(N)} \int d\varphi S_\varphi^{(N)} \sin^2 \frac{\varphi}{2})$$

$$\begin{aligned}
 \bullet N=1 \\
 \bar{C}^{(1)} &= \frac{2}{\pi} \text{Tr} \left(\bar{\Pi}_c^{(1)} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left(\bar{\Pi}_c^{(1)} \cdot \begin{bmatrix} \pi & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \pi \end{bmatrix} \right) = \text{Tr} \left(\bar{\Pi}_c^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Suchen $\min_{\bar{\Pi}_c^{(1)}} \text{Tr} \left(\bar{\Pi}_c^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right)$? wenn

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \bar{\Pi}_c^{(1)} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Pi}_c^{(1)} \geq 0$$

$$\bar{\Pi}_c^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix} \quad U_\varphi \bar{\Pi}_c^{(1)} U_\varphi^\dagger = \begin{bmatrix} a & b e^{-i\varphi} \\ b^* e^{i\varphi} & c \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{bmatrix} a & b e^{-i\varphi} \\ b^* e^{i\varphi} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

$$\bar{\Pi}_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b^* & 1 \end{bmatrix} \quad \text{wenn } \bar{\Pi}_c^{(1)} \geq 0 \quad |b| \leq 1$$

$$\min_{|b| \leq 1} \left(\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ b^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$= \min_{|b| \leq 1} \text{Tr} (2 - \text{Re} b) = 1 \quad \text{denn } b=1$$

Czyli $\bar{\Pi}_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 |+\rangle \langle +|$

Zwinnig auch in $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = |+\rangle \langle +| + 2|-\rangle \langle -|$

Czyli $\bar{\Pi}_c^{(1)}$ „zust“ na minimum wart, wie ma $\int d\varphi \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2}$

Czyli $\bar{\Pi}_{\tilde{\varphi}}^{(1)} = 2 |\psi_{\tilde{\varphi}}\rangle \langle \psi_{\tilde{\varphi}}|$

Many PCM bedne nutam (nie ortogonalni !)

no wyznie stay minimum.

$$\bar{C}^{(1)} = 1$$

Uwaga: taki sam Sredni koszt do tej gry dla
 najlepszej strategii: $\pi_0 = |+\rangle\langle+|$ $\pi_1 = |-\rangle\langle-|$:
 $\tilde{\varphi}(0) = 0$ $\tilde{\varphi}(1) = \pi$

• $N > 1$

$$Z^{(N)} = \frac{1}{2\pi} \text{Tr} \left(\pi_0^{(N)} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\frac{\varphi}{2}} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 1 \end{bmatrix} \right)^{\otimes N} \right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{mierzymy } \pi_0^{(N)} = |+\rangle\langle+|^{\otimes N} \cdot 2^N \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{op ma } 2^N \text{ wymiarowa} \\ \text{przestrzeń} \end{array} \right. \\ Z^{(N)} = \end{array} \right.$

Zauważ, że stan $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N} \in \mathcal{H}_S^{\otimes N} \subset \mathcal{H}^{\otimes N}$
 przestrzeń symetryczna (bez zmian)

$$|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^N (|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) = \sum_{n=0}^N c_n e^{in\varphi} |n\rangle_S$$

gdzie $|n\rangle = \sum_{\text{perm}} \underbrace{|0 \dots 0\rangle}_{N-n} \underbrace{|1 \dots 1\rangle}_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{n}}} = \text{N!}^1$
 wielk. kombin.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sqrt{\binom{N}{n}}$$

Wobec $|n\rangle_S$:

$$S_\varphi^{(N)} = \frac{1}{2^N} \sum_{n, n'} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n'}} e^{i(n-n')\varphi} |n\rangle_S \langle n'|$$

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{i\varphi} - \frac{1}{4} e^{-i\varphi} \right) \frac{1}{2^N} \sum_{n, n'} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n'}} e^{i(n-n')\varphi} |n\rangle_S \langle n'|$$

$$= \frac{1}{2^N} \cdot \left(\pi \sum_n \binom{N}{n} |n\rangle_S \langle n| - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n-1}} (|n\rangle_S \langle n-1| + |n-1\rangle_S \langle n|) \right)$$

$$= \frac{1}{2^N} \cdot \begin{pmatrix} \binom{N}{0} \frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{0} \binom{N}{1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{0} \binom{N}{1}} & \binom{N}{1} & & \\ 0 & -\frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{1} \binom{N}{2}} & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^N} \cdot \begin{pmatrix} \binom{N}{0} \frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{0} \binom{N}{1}} & -Q & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{0} \binom{N}{1}} & \binom{N}{1} & \frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{1} \binom{N}{2}} & \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\binom{N}{1} \binom{N}{2}} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{N}{N} \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy $\overline{T}_0^{(N)}$. Wystarczy sprawdzić

że na $\mathcal{H}_S^{\otimes N}$ jest prawdziwa nasza definicja unitarnej. Z warunku $\int \frac{dU}{2\pi} U \overline{T}_{0,5}^{(N)} U = \mathbb{I}_S$

wynika $\overline{T}_{0,5}^{(N)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Zeby być dokładni uogólniamy powyższe $1 \leq i \leq N$

Ponieważ w A występują również permutacje i inne, to uogólniamy powyższe warunki dla

$$\overline{T}_{0,5}^{(N)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} = (10)_S + \dots + (N)_S \quad (501 + \dots + 5N1)$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \overline{Z}^{(N)} &= \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2^N} \left[\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} - \sum_{m=1}^N \sqrt{\binom{N}{m} \binom{N}{m-1}} \right] = \\ &= \left[2 - \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{m=1}^N \sqrt{\binom{N}{m} \binom{N}{m-1}} \right] \end{aligned}$$

W granicy $N \rightarrow \infty$:

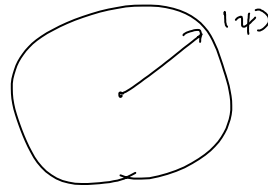
$$\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{m=1}^N \frac{N!}{\sqrt{m! (N-m)! \cdot (m-1)! (N-m+1)!}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \frac{N!}{m! (N-m)!} \sqrt{\frac{m}{N-m+1}} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{N} \quad \overline{Z}^{(N)} \rightarrow \frac{1}{N}$$

czyli to co uśredniamy z $Q \subset R$.

2.4 Optymalna estymacja całkowitego nielocowego (Θ) stanu qubitów

$$\begin{aligned} \hat{H}|\Theta, \psi\rangle &= c_0 e^{i\frac{\Theta}{2}}|0\rangle + e^{i\frac{\Theta}{2}} e^{i\varphi}|1\rangle = \\ &= e^{i\frac{\varphi}{2}} \left(c_0 e^{i\frac{\Theta}{2}}|0\rangle + e^{i\frac{\Theta}{2}}|1\rangle \right) \end{aligned}$$



$$\hat{H}|\Theta, \psi\rangle = e^{i\varphi \frac{1}{2} \sigma_z} e^{i\Theta \frac{1}{2} \sigma_y} |0\rangle$$

$U_{\Theta, \varphi} = U_{\varphi} \in SU(2)/U(1)$ obrót w bieżącej płaszczyźnie

Miarę Haara $\frac{1}{4\pi} d\Theta d\varphi \sim \Theta =: d\psi$

Funkcja kosztu: $C(\psi, \tilde{\psi}) = 4 \cdot (1 - |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|^2)$

$$\begin{cases} |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|^2 \approx c^2 \frac{1}{2} & \text{dla małych kątów:} \\ C = 4 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx \varphi^2 \end{cases}$$



Przyjmijmy, że mamy N kopii: $S_{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}$

$$\overline{C} = \int d\psi \operatorname{Tr}(\Pi_{\Theta} |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}) \cdot 4(1 - |\langle \psi | \psi_0 \rangle|^2)$$

$$\min_{\Pi_{\Theta}} \overline{C}, \quad \Pi_{\Theta} \geq 0, \quad \int d\psi U_{\varphi}^{\otimes N} \Pi_{\Theta} U_{\varphi}^{\otimes N \dagger} = \mathbb{1}$$

$$= 4 \left(1 - \underbrace{\int d\psi \operatorname{Tr}(\Pi_{\Theta} |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}) |\langle \psi | \psi_0 \rangle|^2}_F \right)$$

Chcemy zmaksymalizować F . Zauważ, że macierz

$$|\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N} \in \mathcal{H}_S^{\otimes N}. \quad \text{I mamy ograniczenie}$$

normalizacja do 1 i normalizacja

$$\begin{aligned}
 F &= \int d\psi \operatorname{Tr}(\bar{\Pi}_e |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}) \cdot \operatorname{Tr}(|c\rangle\langle c| |\psi\rangle\langle\psi|) = \\
 &= \int d\psi \operatorname{Tr}(\bar{\Pi}_e \otimes |c\rangle\langle c| \cdot |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N+1}) = \\
 &= \operatorname{Tr}(\bar{\Pi}_e \otimes |c\rangle\langle c| \cdot \underbrace{\int d\psi |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N+1}}_A)
 \end{aligned}$$

A = sp. m.1. przestrzeni $\mathcal{H}_S^{\otimes N}$ o skł. 1

$\operatorname{Tr} A = 1$; możemy wzgl. distancja
 najwyższej reprezentacji $SU(2)$, a wymiar $N+2$

czyli $A = \frac{1}{N+2} \mathbb{I}_{\mathcal{H}_S^{\otimes N+1}}$

$$= \frac{1}{N+2} \operatorname{Tr}(\bar{\Pi}_e \otimes |c\rangle\langle c| \mathbb{I}_{\mathcal{H}_S^{\otimes N+1}})$$

$$\int \mathcal{U}_4^5 \bar{\Pi}_e \mathcal{U}_4^5 = \mathbb{I}_{\mathcal{H}_S^{\otimes N}} \quad \operatorname{Tr} \bar{\Pi}_e = N+1$$

Możemy uzyskać bierac $\bar{\Pi}_e = |c\rangle\langle c|^{\otimes N} (N+1)$

Wtedy $F = \frac{N+1}{N+2}$

Minimalny koszt:

$$\bar{C}^{(N)} = 4 \left(1 - \frac{N+1}{N+2} \right)$$