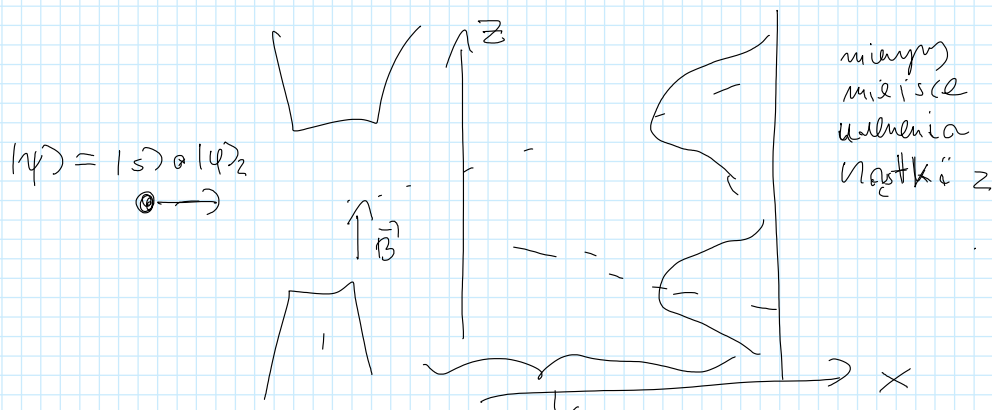


Przykład Eksperyment Stern-Gerlach



$$\vec{B} \approx (B_0 + kz) \hat{e}_z$$

- niejednorodne pole w kierunku z
w liniowym przybliżeniu
spinu $\nabla B \neq 0$

$$|s\rangle = C_+ \underbrace{|\pm \frac{1}{2}\rangle_z}_{1 \rightarrow} + C_- \underbrace{|\mp \frac{1}{2}\rangle_z}_{1 \rightarrow}$$

- mierzony stan spinu
w brzośnięciu nie ciał z

$$H = -\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (\text{w założeniu oddziaływań})$$

Oddziaływanie trwa przez krótki czas δt
w którym ciałko przebiega przez pole magnetyczne
przy czym przyjmujemy dla uproszczenia że ciałko
czuje to same pole.

Dł. uproszczenia przyjmujemy $B_0 \neq 0$

$|\varphi\rangle_z$ - optymalne przybliżenie stanu swobodny cząstki
w kierunku z ponieważ kierunki nie istotne:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \int dz e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} |z\rangle$$

Polem l. czasu o szerokości σ .

$$|\Phi_{\pm}(\delta t)\rangle = e^{\pm i \frac{M}{\hbar} k \sigma_z \delta t} |\pm\rangle |\varphi\rangle =$$

$$1 \quad e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} \pm i \frac{M k \delta t}{\hbar} z}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot | \pm \rangle \otimes \int dz e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} \pm \frac{i\mu k \delta t}{\hbar} z} | z \rangle$$

W reprezentacji q , przed zmianą:

$$| \Phi_{\pm}(\delta t) \rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} | \pm \rangle \otimes \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\hbar}} \int e^{-\left(\frac{p \pm \mu k \delta t}{\hbar}\right)^2 \sigma^2} | p \rangle dp$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} \\ \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{\frac{1}{4}}}}_N \cdot | \pm \rangle \otimes \int e^{-\frac{(p \pm \mu k \delta t)^2}{4\sigma_p^2}} | p \rangle \end{array} \right.$$

Kip pęd w zależności od czasu

Następnie sprawdzamy na swobodnej ewolucji
przez czas $T = \frac{L}{v}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{dla uproszczenia } T \text{ nie zalezy} \\ \text{od kierunku} \end{array} \right.$

Swobodna ewolucja:

$$| \psi \rangle = \int \psi(p) | p \rangle \rightarrow \int \psi(p) e^{-\frac{i p^2}{2m\hbar} T}$$

$$\psi_{\pm}(\delta t + T) = N | \pm \rangle \otimes \int e^{-\frac{(p \pm \alpha)^2}{4\sigma_p^2} - \frac{i p^2 T}{2m\hbar}} | p \rangle$$

Wracamy to repr. p. i. trójkątnie

$$| \psi_{\pm}(\delta t + T) \rangle = \underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{2\pi\sigma_T^2} \right)^{\frac{1}{4}}}_{N_T} \cdot | \pm \rangle \otimes \int e^{-\frac{\left(\overset{\text{premięć}}{\downarrow} \left(z \pm \frac{1}{m} \alpha \right)^2 \pm \frac{i \alpha z}{\hbar} \right)}{4\sigma_T^2}} | z \rangle$$

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 + i \frac{\hbar T}{2m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rozmycie pakietu} \\ \text{na } i \end{array} \right.$$

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 + i \frac{\hbar}{2m} \left\{ \begin{array}{l} \text{wymiar pędu} \\ \text{długości} \end{array} \right.$$

1. teoria między partycjami. Chcemy mieć efektywny opis. Jeśli stan spiny ma partycję jest $|s\rangle$ to chcemy mieć operatory

$$p(z) = \langle s | \Pi_z | s \rangle \text{ mielibyśmy a powiedzieli, ponieważ}$$

dużego z w zależności od spinu. Zginęły

$$p(z) = \text{Tr}(S \Pi_z).$$

(zatem partycja to nie mielibyśmy bezpośrednie interesowały nas wielkości: pomiar nuty nie partycja wygodnym opisem.

Pomiar uogólniony:

- układ oddziaływał z modelem pomiarowym (opisanym kwantowo)
- obserwator między bezpośrednie stan układu pomiarowego (pomiar nuty)

Opis matematyczny:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_S \otimes |c\rangle\langle c|_M & \xrightarrow{\quad} & U \mathcal{H}_S \otimes |c\rangle\langle c|_M U^\dagger \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{układ} & & \text{oddziaływanie z} \\ & & \text{modelem pomiarowym} \end{array}$$

stan początkowy układu pomiarowego

No koniec między modelem pomiarowym

w przedziale np. 1: planu miary $P_i = |i\rangle\langle i|$
 prawdopodobieństwa wynosić i:

$$p_i = \text{Tr} \left(U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \mathbb{I}_S \otimes P_i^M \right) =$$

$$= \text{Tr} \left(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \mathbb{I}_S \otimes P_i^M U \right) =$$

$$= \text{Tr}_S \left(\rho_S \cdot \underbrace{\langle 0| U^\dagger \mathbb{I}_S |0\rangle\langle 0| U}_{\Pi_i^S} \right)$$

$$= \text{Tr} \left(\rho_S \Pi_i^S \right)$$

↑ uogólnie op. pomiarowe
 (nie konieczne miary)

$$\sum_i \Pi_i^S = \mathbb{I}_S, \quad \Pi_i^S \geq 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{POVM} \\ \text{Measurement} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Jawne} \\ \left(\Pi_i^S \right)_m = \langle m | \langle 0| U^\dagger \mathbb{I}_S |0\rangle\langle 0| U | m \rangle | 0 \rangle \\ = \langle \phi_m | \mathbb{I}_S | \phi_m \rangle, \quad |\phi_m\rangle = U | m \rangle | 0 \rangle \end{array} \right.$$

Widny, iż widok oddzielnemu $S+M$!

pomiar wykonany na M spowoduje planu
 planu uogólny na S daję te same
 prawdopodobieństwa.

Wracamy do Stern-Gerlach

$$\left(\Pi_z \right)_m = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad m, m = \pm$$

$$\left(\overline{11}_2 \right)_m^m = \langle \psi_m(s+t) | \uparrow \otimes | z \rangle \langle z | | \psi_m(s+t) \rangle =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sigma_T^2} &= \frac{1}{\sigma^2 + \frac{(\Im h)^2}{2m}} = \frac{\sigma^2 - \frac{(\Im h)^2}{2m}}{\sigma^4 + \left(\frac{\Im h}{2m} \right)^2} \\ \overline{11}_1^+ &= |N_T|^2 e^{-\frac{(z - \frac{\Im h}{2m})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2} \\ \overline{11}_1^- &= |N_T|^2 e^{-\frac{(z + \frac{\Im h}{2m})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2} \end{aligned} \right. \quad |N_T|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} |\sigma_T|^2}$$

$$\left(\overline{11}_2 \right)_-^+ = \left(\overline{11}_2 \right)_+^- = 0$$

$$\overline{11}_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} |\sigma_T|^2} \begin{bmatrix} e^{-\frac{(z - \frac{\Im h}{2m})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z + \frac{\Im h}{2m})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2} \end{bmatrix}$$

$$\int \overline{11}_2 d_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym kontekście: $\Pi_2 \geq 0$

Jaki wynikanie pólki planu nie jest dane $\frac{I_h}{2m} \ll \sigma \ll 1$

$$\Pi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \begin{bmatrix} e^{-\frac{(2-\frac{I_h}{m}\sigma)^2}{2\sigma^2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(2+\frac{I_h}{m}\sigma)^2}{2\sigma^2}} \end{bmatrix}$$

Np. pomiar Π_0 nie nie mówi o

spine bo nie ma mowa o $\uparrow$

względnie stary generał wynik z nowym
prawdopodobieństwem.

Jaki $\frac{I_h}{m}\sigma \gg \sigma$ wtedy pomiar jedynkowy $1, (-)$

Dowiadujemy się tyle: z pomiaru mutanego

Jaki $\frac{I_h}{m}\sigma \ll \sigma$ wtedy pomiar produktowy
n.c. nie mówi o wartości spinu

Kiedy PVM da się zredukować jako Umstanc + składowe

Tw. Neumark'a (szerezy przyr. dch)

$$\{\Pi_i^S\}, \quad i=1\dots K \quad \Pi_i^S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_d) \quad \sim \quad S$$

Polemy i0 istnieje $U \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{d \otimes K})$

mutany P_i który do

$$\forall_{S_S} \quad \text{Tr}(S_S \Pi_i^S) = \text{Tr}(U S_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger |0\rangle\langle 0| P_i^M)$$

$$\text{Zdefiniujmy: } U| \psi \rangle \otimes |0\rangle = \sum_{i=1}^K \sqrt{\Pi_i} |\psi\rangle |i\rangle$$

$$\sqrt{111} \geq 0$$

Spezialwinkelunterschied

$$\left(\sum_i \langle \psi' | \langle i | \sqrt{w_i} \right) \left(\sum_j \sqrt{w_j} | \psi \rangle | j \rangle \right) =$$

$$= \langle \psi' | \sum_i w_i | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi \rangle = 1$$

celn Unitare na p.1 prečnari zavis more
byl n.1 ssonar d.1 p.1 nej unitarej:

$$U = \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^N \\ \vdots & & \vdots \\ u_d^1 & \dots & u_d^N \end{bmatrix} \quad N = d \cdot K$$

AK

Can u join online? Nie:

Możemy więc $u|\psi\rangle \otimes |0\rangle = \sum_{i=1}^N V_i \sqrt{\pi_i} |\psi\rangle |i\rangle$

Oznaka iz stanja poravnane nie jednomy.

Zwrócić uwagę w tym polskim namet
jest to ortogonale to i tak można
niezmienny obrot p. pamiata.

Za istothne zdoenienie stam odpramieniu
 $\sqrt{11}$; bo V_i odwracalne, Detekcyj pójmej

Możemy więc kompletny opis matematyczny pamiarać

Sten utökar programmet och gör härigen

$$\rho_S \otimes |a\rangle_M \langle c| \rightarrow U \rho_S \otimes |c\rangle_M \langle c| U^\dagger \rightarrow \text{partner } |c\rangle_M$$

$$\frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow}$$

$$\frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow} U S_S \frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow} U^\dagger \frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow}$$

Stan układu jest takim samym jak w układzie $|i\rangle\langle i|$

$$\rho_S^{(i)} = \text{Tr}_M \left(\frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow} U S_S \frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow} U^\dagger \frac{\langle 0 | i \rangle \langle i |}{\rightarrow} \right) =$$

$$= \underbrace{\langle i | U | 0 \rangle}_{K_i} S_S \underbrace{\langle 0 | U^\dagger | i \rangle}_{K_i^\dagger}$$

$$\text{Skł} = \text{Tr} S_S^{(i)} = \text{Tr} \left(S_S \underbrace{K_i^\dagger K_i}_{\Pi_i} \right) = p_i$$

Stan unarmowany: pod warunkiem układu i nie istnieją zbudowane

$$\rho_S^{(i)} = \frac{1}{p_i} K_i S_S K_i^\dagger, \quad K_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\Pi_i}$$

nie istnieją zbudowane
K istnieją zbudowane stan

Uwaga: Nie mamy własności "Repeatability"

bo pomiary nie są zgodne w ogólności!

Jakiś moment stan układu $S_S = |\psi\rangle\langle\psi|$ to

$$\rho_S^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| \quad |\psi^{(i)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} K_i |\psi\rangle$$

Zauważ, że dane $\{\Pi_i\}$ wyznacza $\{K_i\}$

jedynym z dodatków do układu $K_i \cdot U_i$

Interakcyjne - występuje układ pomiaru

układu - brakuje stan po pomiarze -

- nie zmienia to statystyk

Delecheracja

Jakiś układ z którym chcemy układać

to nie możemy pomiarować - nie mamy

dotychno do układu pomiaru, sum...

Wtedy stan układu:

$$S_5^{\text{ant}} = \sum_i K_i S_5 K_i^\dagger, \quad \sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}$$

$$= \text{Tr}_m(U S_5 \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger)$$

Ogólnie gęstość ewaluacji układu w kontroli
z otoczeniem. (P - mierz.

W ogólności stan układu $\rightarrow$ mierzony

zawodzący przykład $S_5^{\text{ant}} = U S_5 U^\dagger$ ew. unitarna

Przykład

Ogólny stan spinowy cząstki w exp.

S-G przy założeniu braku dostępu do pozostałych
stopni swobody

$$|+\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} |+\rangle|\psi_+\rangle$$

$$|-\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} |-\rangle|\psi_-\rangle$$

$$S_5^{\text{ant}} = \text{Tr}_m(U S_5 \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger) =$$

$$= \text{Tr}_m(S_{++}|+\rangle\langle +| \otimes |\psi_+\rangle\langle \psi_+| + S_{--}|-\rangle\langle -| \otimes |\psi_-\rangle\langle \psi_-|$$

$$+ S_{+-}|+\rangle\langle -| \otimes |\psi_+\rangle\langle \psi_-| + S_{-+}|-\rangle\langle +| \otimes |\psi_-\rangle\langle \psi_+|)$$

$$= \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} |\langle \psi_- | \psi_+ \rangle|^2 \\ \langle \psi_+ | \psi_- \rangle^2 S_{-+} & S_{--} \end{pmatrix}$$

Tu nie ma mierzalnego gęstości układu

T - iloczyn składowe się nie zmieniają
mierzalność więc $T = C$.

$$S_5^{\text{ant}} = \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_p^2}} \\ S_{-+} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_p^2}} & S_{--} \end{pmatrix} \quad \sigma_p^2 = \frac{t^2}{4\sigma^2}$$

Delikwencja tym silniejsza im większa wartość p i ω oraz mniejsza wartość σ i t