Wyklad 10 - practical protcols

13 grudnia 2014 21:43

Zarówno stany NOON jak i optymalne Bayesowskie są bardzo trudne do przygotowania w układach optycznych i atomowych a dla dużych N w zasadzie nie możliwe.

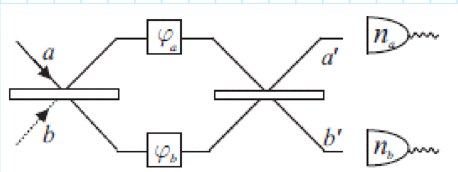
W praktyce: • stany ściśnięte w układach optycznych

• stany spinowo-ściśnięte, w układach atomowych (BEC).

+ proste pomiary obserwabli

10.1 Int. Macha-Zehndera

$|\psi\rangle_{in}$



$|\psi_\varphi\rangle$

$$\begin{pmatrix}\hat{a}'\\ \hat{b}'\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\mathrm{i}\varphi_a} & 0\\ 0 & e^{\mathrm{i}\varphi_b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix} =$$

$$= e^{\mathrm{i}(\varphi_a+\varphi_b)/2}\begin{pmatrix}\cos(\varphi/2) & -\sin(\varphi/2)\\ \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}, \quad (27)$$

$\varphi = \varphi_b - \varphi_a$

Wygodne będzie użyć reprezentacji Jordana-Schwingera

$$J_x = \frac{1}{2}\left(a^\dagger b + b^\dagger a\right), \quad J_y = \frac{i}{2}\left(b^\dagger a - a^\dagger b\right), \quad J_z = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a - b^\dagger b\right)$$

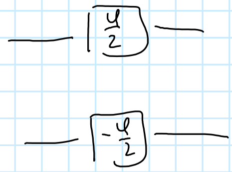
$$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k$$

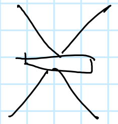
$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{\hat{N}}{2}\left(\frac{\hat{N}}{2}+1\right) \qquad \hat{N} = a^\dagger a + b^\dagger b$$

total photon number operator

Transformacje na stanach światła będą interpretować jako obroty w abstrakcyjnej przestrzeni spinowej.

$$a' = U a U^\dagger \qquad b' = U b U^\dagger \qquad U = e^{-i\alpha \vec{J}\cdot\vec{s}}$$

$$e^{-i\varphi J_z} =$$  obrót wokół osi z

$$e^{-i\frac{\pi}{2} J_x} =$$  obrót wokół osi x

Dowody przez BCH:

$$e^{A} B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \dots$$

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x' \\ \hat{J}_y' \\ \hat{J}_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Działa teraz efektywnie MZ to obrót o kąt φ wokół osi y

$$U_{MZ} = e^{-i\varphi J_y}$$

Chcemy estymować fazę z pomiarów różnicy zliczeń na detektorach.

$$\hat{n}_a - \hat{n}_b = 2 J_z$$

$$\langle\psi_\varphi| J_z |\psi_\varphi\rangle = {}_{in}\langle\psi| J_z' |\psi\rangle_{in} = \cos\varphi \langle J_z\rangle_{in} - \sin\varphi \langle J_x\rangle_{in}$$

Widzimy że miara średnia $\langle J_z\rangle$ niesie informację o φ

Jeśli liczymy błąd estymacji φ na podstawie pomiarów obserwabli J_z przez prostą propagację błędu to potrzebujemy wariancji obserwabli J_z

$$\Delta^2 J_z = \langle J_z'^2 \rangle_{in} - \langle J_z' \rangle^2_{in} =$$

$$= \langle \cos^2\varphi \, J_z^2 + \sin^2\varphi \, J_x^2 - \cos\varphi \sin\varphi \left(J_x J_z + J_z J_x \right) \rangle_{in}$$

$$- \cos^2\varphi \langle J_z \rangle^2_{in} - \sin^2\varphi \langle J_x \rangle^2_{in} + 2\cos\varphi \sin\varphi \langle J_z J_x \rangle_{in}$$

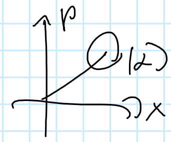
$$= \cos^2\varphi \, \Delta^2 J_z|_{in} + \sin^2\varphi \, \Delta^2 J_x|_{in} - 2\cos\varphi\sin\varphi \, \mathrm{cov}(J_x, J_z)|_{in}$$

$$\Big\{ \mathrm{cov}(J_x J_z) = \frac{1}{2}\left(\langle J_x J_z + J_z J_x \rangle \right) - \langle J_x \rangle \langle J_z \rangle$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\Delta^2 J_z}}{\left| \frac{d\langle J_z \rangle}{d\varphi} \right|}$$

Przykład:

a) $|\psi\rangle_{in} = |\alpha\rangle \otimes |0\rangle$ $\qquad \Big\{ |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$



$$\bar{N} = |\alpha|^2$$

$$\langle J_z \rangle_{in} = \frac{1}{2} |\alpha|^2 \qquad \langle J_x \rangle_{in} = 0$$

$$\langle J_z^2 \rangle_{in} = \frac{1}{4}\left(|\alpha|^4 - |\alpha|^2 \right) \qquad \langle J_x^2 \rangle_{in} = \frac{1}{4} |\alpha|^2$$

$\Delta^2 J_z|_{in} = \frac{1}{4}|\alpha|^2 \qquad \Delta^2 J_x|_{in} = \frac{1}{4}|\alpha|^2$

$\mathrm{cov}(J_x J_z) = 0$

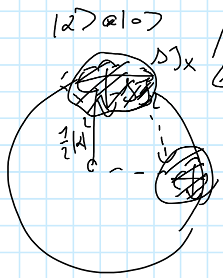
$\langle J_z \rangle = \cos\varphi \, \frac{1}{2}|\alpha|^2 \qquad \frac{d\langle J_z\rangle}{d\varphi} = \sin\varphi \, \frac{1}{2}|\alpha|^2$

$\Delta^2 J_z = \frac{1}{4}|\alpha|^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{4}|\alpha|^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{4}|\alpha|^2$

$$\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{2}|\alpha|}{\frac{1}{2}|\alpha|^2|\sin\varphi|} = \frac{1}{|\alpha||\sin\varphi|} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{|\sin\varphi|}$$

optymalny punkt pracy $|\varphi| = \frac{\pi}{2} \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$

shot noise scaling



Ω = obrót wokół osi y o $\frac{\pi}{2}$

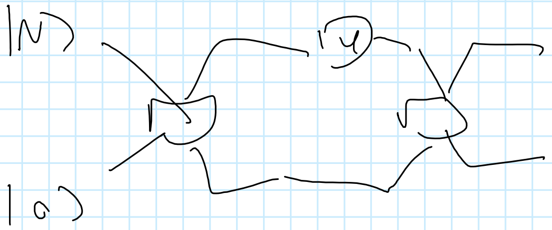
$\Delta J_z = \frac{1}{2}|\alpha| \qquad \frac{\partial\langle J_z\rangle}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}|\alpha|^2$

Czy mamy coś zrobić ze stanem żeby ΔJ_z było mniejsze i błąd mniejszy.

Uwaga pewne subtelności z przechodzeniem

$N \to \bar{N}$, nieistotne..

b)



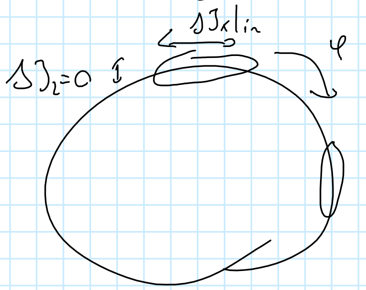
$\langle J_z \rangle_{in} = \frac{1}{2}N \qquad \langle J_x \rangle_{in} = 0$

$\langle J_z^2 \rangle_{in} = \frac{1}{4}N^2 \qquad \Delta^2 J_z|_{in} = 0 \quad \Delta^2 J_x|_{in} = \frac{1}{4}N$

$\langle J_z \rangle = \frac{1}{2} N \cos\varphi$

$\delta^2 J_z = \frac{1}{4} N \sin^2\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{N}\,|\sin\varphi|}{\frac{1}{2} N |\sin\varphi|} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

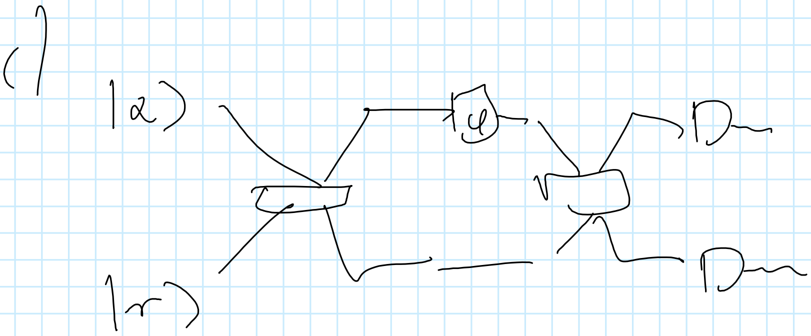


nie nie zmienia obrót o φ zawsze te same ...

brak fluktuacji $J_z|_{in}$

Taki stan będziemy mieli w ultrazimnych atomach gdzie znamy liczbę cząstek.

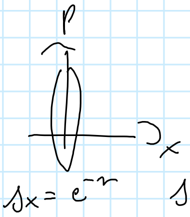
Tak nie prawda to samo moglibyśmy zrobić efektywnie z koherentnym gdybyśmy mieli też ustaloną liczbę cząstek a nie tylko J_z



ściśnięta próżnia,

$$|r\rangle = \underbrace{e^{\frac{1}{2} r (b^2 - b^{+2})}}_{S(r)} |0\rangle \qquad r \in \mathbb{R}$$

$$S(r)^+ b\, S(r) = b + \underbrace{\tfrac{1}{2} r [b^{+2}, b]}_{r b^+} - \tfrac{1}{2} r^2 b^+ \ldots$$
$$= b \cosh r + b^+ \sinh r$$



$\Delta x = e^{-r}$ $\Delta p = e^{r}$

Związek ściśnięcia koherentnego i δJ nie jest oczywisty ale jest

$\bar{N} = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$

$$\langle J_z \rangle_{in} = \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \sinh^2 r \right) \qquad \langle J_x \rangle_{in} = 0$$

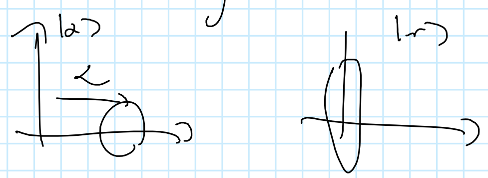
$$\delta^2 J_z \big|_{in} = \frac{1}{4}\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\sinh^2 2r \right)$$

$$\delta^2 J_x \big|_{in} = \frac{1}{4}\left(|\alpha|^2 \cosh 2r - \underbrace{\mathrm{Re}(\alpha^2)} \sinh 2r + \sinh^2 r \right)$$

$$\mathrm{cov}(J_x, J_z) = 0$$

widzimy że mamy szanse istotnie zmniejszyć $\delta^2 J_x$

optymalne wybranie $\alpha = \mathrm{Re}\,\alpha$



amplituda st. koherentnego w kierunku mniejszych fluktuacji

$$\delta\varphi = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\sinh^2 2r \right) + |\alpha|^2 e^{-2r} + \sinh^2 r}}{\left| |\alpha|^2 - \sinh^2 r \right|}$$

Optymalny $\varphi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$$\delta\varphi = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 e^{-2r} + \sinh^2 r}}{\left| |\alpha|^2 - \sinh^2 r \right|}$$

widzimy że jest szansa na zbicie fluktuacji

Optymalizujemy r przy warunku $|\alpha|^2 + \sinh^2 r = \bar{N}$ numerycznie. W granicy $\bar{N} \gg 1$

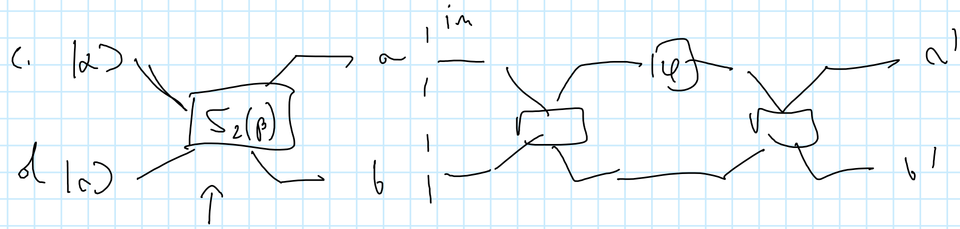
$$\sinh^2 r \approx \sqrt{\bar{N}}/2 \approx \frac{e^{2r}}{4}$$

większość fotonów w wiązce koherentnej $\simeq \bar{N} - \sqrt{\bar{N}}/2$

$$\delta\varphi \simeq \frac{\sqrt{\bar N/(2\sqrt{\bar N}) + \sqrt{\bar N}/2}}{\bar N} \simeq \frac{1}{\bar N^{\frac{3}{4}}}$$

Mamy lepsze skalowanie !

d) można jeszcze lepiej : ( )



two mode squeezing

$$S_2(\beta) : \quad \begin{bmatrix} a \\ b^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\frac{1}{2}\beta & \sinh\frac{1}{2}\beta \\ \sinh\frac{1}{2}\beta & \cosh\frac{1}{2}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d^\dagger \end{bmatrix}$$

$$\left\{ S_2(\beta) = e^{\frac{i\beta}{2}\left(c^\dagger d^\dagger + cd\right)} \right.$$ ~ two mode squeezing

$$\langle J_z\rangle_{in} = \langle \tfrac{1}{2}\left(a^\dagger a - b^\dagger b\right)\rangle =$$

$$= \langle\alpha|\langle 0|\tfrac{1}{2}\left(\cosh\tfrac{1}{2}\beta\, c^\dagger + \sinh\tfrac{1}{2}\beta\, d\right)\left(\cosh\tfrac{1}{2}\beta\, c + \sinh\tfrac{1}{2}\beta\, d^\dagger\right) -$$

$$- \left(\sinh\tfrac{1}{2}\beta\, c + \cosh\tfrac{1}{2}\beta\, d^\dagger\right)\left(\sinh\tfrac{1}{2}\beta\, c^\dagger + \cosh\tfrac{1}{2}\beta\, d\right)\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\sinh^2\tfrac{1}{2}\beta + \cosh^2\tfrac{1}{2}\beta\,|\alpha|^2 - |\alpha|^2\sinh^2\tfrac{1}{2}\beta - \sinh^2\tfrac{1}{2}\beta\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}|\alpha|^2$$

$$\langle J_x\rangle_{in} = \tfrac{1}{2}|\alpha|^2 \sinh\beta$$

{ $\beta = 0$ wracamy do sytuacji c)
d)

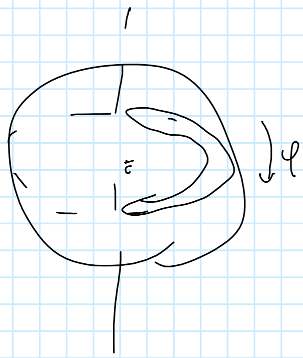
$$\Delta^2 J_z\big|_{in} = \tfrac{1}{4}|\alpha|^2$$

$$\Delta^2 J_x\big|_{in} = \frac{|\alpha|^2}{2}\left(\sinh^2\beta + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\sinh^2\beta$$

$$\mathrm{cov}\,(J_x, J_z)\big|_{in} = \frac{|\alpha|^2}{4}\left(|\alpha|^2+1\right)\sinh\beta - \frac{|\alpha|^2}{4}\sinh\beta =$$
$$= \frac{|\alpha|^4}{4}\sinh\beta$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi\,\frac{1}{4}|\alpha|^2 + \sin^2\varphi\left[\frac{|\alpha|^2}{2}\left(\sinh^2\beta+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\sinh^2\beta\right] - \sin 2\varphi\,\frac{|\alpha|^4}{4}\sinh\beta}}{\left|\sin\varphi\,\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \cos\varphi\,\frac{1}{2}|\alpha|^2\sinh\beta\right|}$$

optimum dla $\varphi = 0$



$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{|\alpha|^2\sinh^2\beta}$$

Wstawiamy całkowitą liczbę fotonów:

$$\bar{N} = \left(|\alpha|^2+1\right)\cosh\beta - 1$$

Numerycznie optymalizujemy po $|\alpha|^2$ i wychodzi że $|\alpha|^2 \simeq 1$ i

$$\Delta\varphi \approx \frac{2}{\bar{N}}$$ skalowanie Heisenberga.

10.2 Int. Ramseya, układy atomowe

- est coherence
- N two level atoms
- one-axis, two-axis, ...

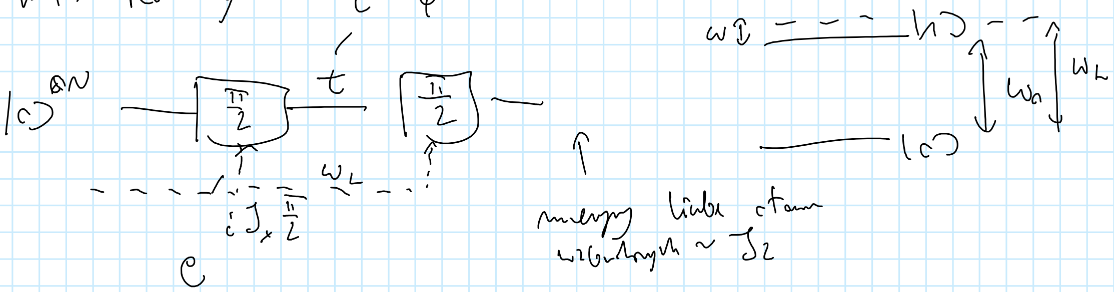
N dwupoziomowych atomów. Traktujemy jako N spinów $\frac{1}{2}$, $|1\rangle$ —— $|0\rangle$ —— $\updownarrow \omega_0$ częstość przejścia

$$\mathbb{C}_2^{\otimes N} = \bigoplus_{j=0}^{\frac{N}{2}} \mathcal{H}_j \qquad j = \frac{N}{2} \text{ przestrzeń całk. symetryczna}$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} \sigma_z^{(i)} \qquad J_x, J_y = \ldots$$

$$J^2 = j(j+1) = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ dla st. symetrycznych}$$

Int. Ramseya: $e^{i\underbrace{\omega_0 t}_{\varphi}\frac{J_z}{2}}$



W trakcie impulsu $\frac{\pi}{2}$ wiązka wygląda jako mod światła lasera a ewoluującym stanem.

Efektywnie wszystko jest w M2 tylko

$$\varphi = \omega \cdot t \quad \text{gdzie} \quad \omega = \omega_L - \omega_0$$

Wszystko tak samo:

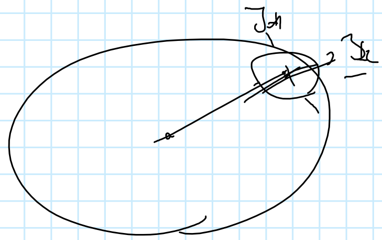
$$\Delta\omega = \frac{\sqrt{\Delta^2 J_z}}{\left|\frac{d\langle J_z\rangle}{d\omega}\right|} = \frac{1}{t}\frac{\sqrt{\Delta^2 J_z}}{\left|\frac{d\langle J_z\rangle}{d\varphi}\right|}$$

Chcemy mieć stany ściśnięte ale bez

zmiany liczby cząstek, ...

• Stan spinowy koherentny: $|\theta,\varphi\rangle^{\otimes N} =$

$$= e^{i\theta(J_x \sin\varphi - J_y \cos\varphi)} |0\rangle^{\otimes N}$$



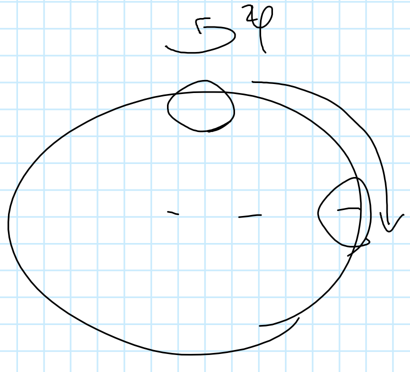
równe rozłożenie składowych J w kierunkach prostopadłych do $\langle \vec{J} \rangle$.

$$\Delta^2 J_{\perp 1}\, \Delta^2 J_{\perp 2} \geq \frac{|\langle \vec{J} \rangle|^2}{4} \qquad \max |\langle \vec{J} \rangle| = \frac{N}{2}$$

Jeśli któraś ze składowych $\Delta^2 J_\perp \leq \frac{N}{4}$

Parametr ściśnięcia $\xi_s^2 = \frac{\min_\perp \Delta^2 J_\perp \cdot 4}{N}$

mówimy że stan jest spinowo ściśnięty



$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\Delta^2 J_2}}{\left|\frac{d\langle J_2\rangle}{d\varphi}\right|} \overset{\text{koherentny}}{=} \frac{\sqrt{\frac{N}{4}}}{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

parametr ściśnięcia min Δ

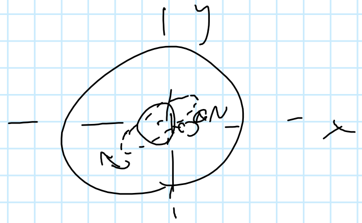
Tego typu stany mogą nam dać lepszą precyzję niż spinowo-koherentne. (cf. stany Focka).

Ściśnięcie wiąże się ze splątaniem cząstek.

(myślimy trochę inaczej niż w przypadku światła)

• One axis-twisting Hamiltonian (BEC, ...)

$$e^{-\frac{i}{2}\theta J_x^2}|0\rangle^{\otimes N}$$



$$\sqrt{\frac{\Delta^2 J_\perp}{\langle J_z\rangle}} = \underbrace{\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}}_{\xi} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

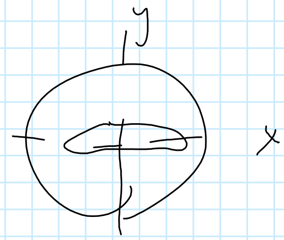
$$\xi \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{N^{\frac{5}{6}}} \qquad N \gg 1, \quad \theta \ll 1$$

• Two axis-twisting (difficult to implement)

$$e^{-\frac{i\theta}{2}\left(J_+^2 - J_-^2\right)}|0\rangle^{\otimes N}$$

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$



$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{N} \qquad \{\text{numerics}\} \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Wyprowadzić one-axis (może się przydać do domowych zadań) dedukowania....