

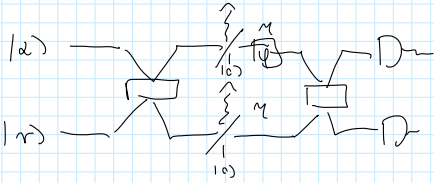
Wykład 11 - decoherence in metrology

10 stycznia 2015 23:07

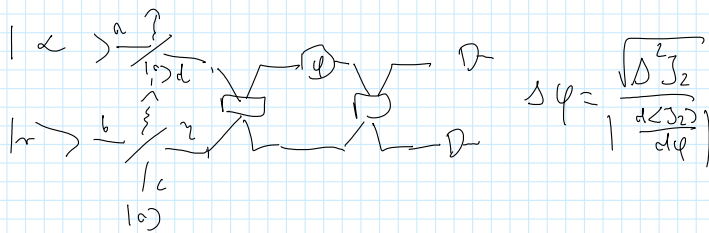
Żeby ocenić przydatność kwantowej metrologii musimy uwzględnić

decharakterne: straty, defazowanie, ...

11.1 Wpływ strat na precyzyjność interferometryczną wykorzystując stan Focka:



◻ mierzymy przekładnię straty: $\frac{I_{out}}{I_{in}} = \eta$



$$\Delta\varphi = \left| \frac{d\langle J_2 \rangle}{d\varphi} \right|$$

Wyrażenia $\langle J_2 \rangle$, ΔJ_2 w funkcji $\langle J_x \rangle_{in}$ oraz musimy dobrać przekładnię przez pryzmi η .

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} a \\ \swarrow \eta \\ |0\rangle_d \\ \downarrow \\ c \\ \downarrow \\ b \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{a} \\ \swarrow \\ \tilde{c} \\ \downarrow \\ \tilde{d} \\ \downarrow \\ b \end{array} & \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \sqrt{1-\eta} \\ \sqrt{1-\eta} & \sqrt{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \sqrt{1-\eta} \\ \sqrt{1-\eta} & \sqrt{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{array} \end{aligned}$$

$$\langle J_2 \rangle = \cos\varphi \langle J_2 \rangle_{in} - \sin\varphi \langle J_x \rangle_{in}$$

$$\langle \tilde{J}_2 \rangle_{in} = \left\langle \frac{1}{2} (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} - \tilde{b}^\dagger \tilde{b}) \right\rangle_{in} = \frac{1}{2} \langle (\sqrt{\eta} a^\dagger + \sqrt{1-\eta} c^\dagger) (\sqrt{\eta} a + \sqrt{1-\eta} c) - (\sqrt{\eta} b^\dagger + \sqrt{1-\eta} d^\dagger) (\sqrt{\eta} b + \sqrt{1-\eta} d) \rangle_{in} = \eta \langle J_2 \rangle_{in}$$

$$\langle \tilde{J}_x \rangle_{in} = \eta \langle J_x \rangle_{in}$$

$$\langle \tilde{J}_2 \rangle = \eta [\cos\varphi \langle J_2 \rangle_{in} - \sin\varphi \langle J_x \rangle_{in}]$$

Analogicznie

$$\Delta^2 J_2 = \cos^2\varphi \Delta^2 J_2|_{in} + \sin^2\varphi \Delta^2 J_x|_{in} - 2\cos\varphi\sin\varphi \text{cov}(J_x, J_2)|_{in}$$

ale tu bierzemy utwór od $|0\rangle_c, |0\rangle_d$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}_2^2 \rangle_{in} &= \frac{1}{4} \langle (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} - \tilde{b}^\dagger \tilde{b})^2 \rangle_{in} = \\ &= \frac{1}{4} \langle [(\sqrt{\eta} a^\dagger + \sqrt{1-\eta} c^\dagger) (\sqrt{\eta} a + \sqrt{1-\eta} c) - (\sqrt{\eta} b^\dagger + \sqrt{1-\eta} d^\dagger) (\sqrt{\eta} b + \sqrt{1-\eta} d)]^2 \rangle_{in} \\ &= \eta^2 \langle J_2^2 \rangle_{in} + \frac{1}{4} (\sqrt{\eta} a^\dagger \sqrt{1-\eta} c \sqrt{1-\eta} c^\dagger \sqrt{\eta} a + \sqrt{\eta} b^\dagger \sqrt{1-\eta} d \sqrt{1-\eta} d^\dagger \sqrt{\eta} b) \\ &= \eta^2 \langle J_2^2 \rangle_{in} + \frac{1}{4} \eta (1-\eta) (a^\dagger a + b^\dagger b) = \end{aligned}$$

$$= \eta^2 \left(\langle J_z^2 \rangle_{in} + \frac{1}{4} \frac{1-\eta}{\eta} \langle N \rangle_{in} \right)$$

$$\delta^2 J_z = \eta^2 \left(\cos^2 \varphi \delta^2 J_z|_{in} + \sin^2 \varphi \delta^2 J_x|_{in} - 2 \cos \varphi \sin \varphi \langle J_x J_z \rangle|_{in} + \frac{1}{4} \frac{1-\eta}{\eta} \langle N \rangle_{in} \right)$$

Dla $|\alpha\rangle \otimes |r\rangle$ mamy: $\{ \langle J_x \rangle_{in} = 0, \langle J_z \rangle_{in} = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 - \sinh^2 r) \}$

$$\langle J_z \rangle = \eta \cos \varphi \frac{1}{2} (|\alpha|^2 - \sinh^2 r)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta^2 J_z|_{in} &= \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sinh^2 2r), \quad \delta^2 J_x|_{in} = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 \cosh 2r + \sinh^2 r - \text{Re} \alpha^2 \sinh 2r) \\ \cos \varphi \langle J_x J_z \rangle &= 0 \quad \langle N \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \end{aligned} \right.$$

$$\delta^2 J_z = \frac{\eta^2}{4} \left[\cos^2 \varphi (|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sinh^2 2r) + (|\alpha|^2 e^{-2r} + \sinh^2 r) \sin^2 \varphi + \frac{1-\eta}{2} (|\alpha|^2 + \sinh^2 r) \right]$$

dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\delta \varphi = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 e^{-2r} + \sinh^2 r + \frac{1-\eta}{2} (|\alpha|^2 + \sinh^2 r)}}{|\alpha|^2 - \sinh^2 r}$$

\forall granicy $\langle N \rangle \rightarrow \infty$ optymalnie wziąć $|\alpha| \gg \sinh^2 r$

$$\delta \varphi \approx \frac{\sqrt{e^{-2r} + \frac{1-\eta}{2}}}{|\alpha|} \approx \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Czyli składowe kłopoty czynniki jakiego rodzaju?

Gdybyśmy mieli sam stan koheryentny $r=0$

$$\delta \varphi = \frac{\sqrt{1 + \frac{1-\eta}{2}}}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\eta N}}$$

Czyli zysk to czynnik $\sqrt{1-\eta}$.

Czy da się lepiej?

11.2 Fundamentalne ograniczenia w obecności

dekoherencji (np. strat) poprzez informację Fidler
Jaka precyzja może osiągnąć N partiami przy transmisji η ?

Problem - dekoherencja \rightarrow stan mierzone \rightarrow błąd
jakości partii QFI i transmisji z optymalizowanym po $|\psi\rangle$.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\Lambda_\varphi} \delta \varphi \leftarrow \text{stan mierzonego układu} \\ \text{analizy QFI.}$$

$$F(\delta \varphi) = \min_{|\psi\rangle \in \mathcal{E}} F(|\psi\rangle) \\ \uparrow \text{przydatny}$$

$$\delta \varphi = \Lambda_\varphi(|\psi\rangle) = \sum_i \kappa_i^\varphi |\psi\rangle \langle \psi| \kappa_i^\varphi +$$

Miary równoważne myślenie o przekazywaniu kanału

$$\begin{array}{l}
 S \quad |\psi\rangle \\
 E \quad |0\rangle
 \end{array}
 \rightarrow
 \boxed{V_\varphi}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 |\underline{\psi}_\varphi\rangle_{SE} \\
 \end{array}
 \quad S_\varphi = \text{Tr}_E |\underline{\psi}_\varphi\rangle_{SE} \langle \underline{\psi}_\varphi|$$

$$S_\varphi = \text{Tr}_E (V_\varphi |\psi\rangle \langle \psi| \otimes |0\rangle \langle 0| V_\varphi^\dagger) = \sum_i \underbrace{\langle i| V_\varphi |0\rangle}_{K_i} |\psi\rangle \langle \psi| \underbrace{\langle 0| V_\varphi^\dagger |i\rangle}_{K_i^\dagger}$$

$$|\underline{\psi}_\varphi\rangle = V_\varphi |\psi\rangle |0\rangle = \sum_i K_{i,\varphi} |\psi\rangle |i\rangle$$

Rinne przekazywanie - inne reprezentacje kanału kwantowego

$$V_\varphi \rightarrow \mathbb{1} \otimes W_\varphi \cdot V_\varphi$$

$$K_{i,\varphi} \rightarrow \tilde{K}_{i,\varphi} = \sum_j (W_\varphi)_{ij} K_{j,\varphi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \tilde{K}_i = \langle i| \cdot (\mathbb{1} \otimes W_\varphi) \cdot V_\varphi |0\rangle = \langle i| \cdot \mathbb{1} \otimes \sum_j (W_\varphi)_{ij} |j\rangle \langle j| V_\varphi |0\rangle \\
 = \sum_j (W_\varphi)_{ij} K_{j,\varphi}
 \end{array} \right.$$

$$F(|\underline{\psi}_\varphi\rangle) = \gamma (\langle \underline{\psi}_\varphi | \underline{\psi}_\varphi \rangle - | \langle \psi | \underline{\psi}_\varphi \rangle |^2)$$

$$|\underline{\psi}_\varphi\rangle = \sum_i K_{i,\varphi} |\psi\rangle |i\rangle$$

$$F(|\underline{\psi}_\varphi\rangle) = \gamma (\sum_i \langle \psi | \tilde{K}_{i,\varphi}^\dagger \tilde{K}_{i,\varphi} | \psi \rangle - | \sum_i \langle \psi | \tilde{K}_{i,\varphi}^\dagger \tilde{K}_{i,\varphi} | \psi \rangle |^2)$$

$$\leq \gamma \langle \psi | \sum_i \tilde{K}_{i,\varphi}^\dagger \tilde{K}_{i,\varphi} | \psi \rangle$$

$$F(S_\varphi) \leq \gamma \min_{\{K_{i,\varphi}\}} \langle \psi | \sum_i \tilde{K}_{i,\varphi}^\dagger \tilde{K}_{i,\varphi} | \psi \rangle$$

$$\max_{|\psi\rangle} F(S_\varphi) \leq \gamma \max_{|\psi\rangle} \min_{\{K_{i,\varphi}\}} \langle \psi | \sum_i \tilde{K}_{i,\varphi}^\dagger \tilde{K}_{i,\varphi} | \psi \rangle$$

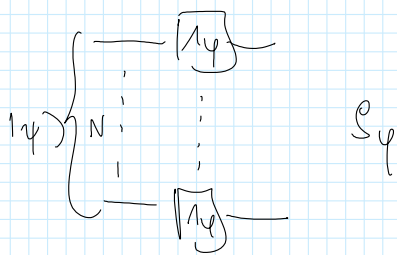
$$\leq \gamma \min_{\{K_{i,\varphi}\}} \left\| \sum_i \tilde{K}_{i,\varphi}^\dagger \tilde{K}_{i,\varphi} \right\|$$

Ograniczenia QFI stan wypisanego przez właściwości kanału.

Wzajemnie zależny od tego czy potrafimy znaleźć właściwy

reprezentację kanału dająca nietykalne ograniczenie,

11.3 Mieszanelementy sum



$$N_\varphi^{\otimes N}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_N} k_{i_1, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi}(\cdot) k_{i_1, \varphi}^+ \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi}^+$$

Funkcja reprezentuje krawie nie musi mieć struktury tensorowej. My ją do tej części ograniczamy.

$$F(S_\varphi) \leq 4 \min_{\{k_{i, \varphi}\}_{i \in N}} \left\| \sum (k_{i_1, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi})^+ (k_{i_1, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi}) \right\|$$

reprezentacja pierścienia krawi

$$= 4 \min \left\| \sum_{i_1, \dots, i_N} \sum_{k=1}^N k_{i_1, \varphi}^+ k_{i_1, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi}^+ k_{i_N, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi}^+ k_{i_N, \varphi} \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1 \neq k_2} k_{i_1, \varphi}^+ k_{i_1, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_{k_1}, \varphi}^+ k_{i_{k_1}, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_{k_2}, \varphi}^+ k_{i_{k_2}, \varphi} \otimes \dots \otimes k_{i_N, \varphi}^+ k_{i_N, \varphi} \right\|$$

$$\leq 4 \min \left(N \underbrace{\left\| \sum_i k_{i, \varphi}^+ k_{i, \varphi} \right\|}_\alpha + N(N-1) \underbrace{\left\| \sum_i k_{i, \varphi}^+ k_{i, \varphi} \right\|^2}_\beta \right)$$

Też wystarczy mieć reprezentację krawi t.j. $\|\beta\| = 0$ i mamy składowane funkcje F_α o tym samym $\frac{1}{\sqrt{N}}$ przekroju

Amplitudy w tej samej krawi definiujemy na jej wierzchołkach \forall

► 11.4. Strony krawi:

Krawi grafu G stanowią: $(0), (1) \rightarrow (0), (1), (vac)$



$$A_\psi = \sum_i K_{i,\psi} \cdot K_{i,\psi}^\dagger \quad K_{i,\psi} = k_i U_\psi \quad U_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$

$$K_c = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \\ \sqrt{1-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & c \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}$$

1
Początek pomiaru z $p=\gamma$

2
faza ginię z $p=1-\gamma$ z miedzi $(0,1)$

$$K_{0,\psi} = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} e^{-i\psi/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_{1,\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \\ \sqrt{1-\gamma} e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix} \quad K_{2,\psi} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & c \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$

3
Pochylenie w $\psi=0$

$$K_{0,\psi}|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_{1,\psi}|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \\ \sqrt{1-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad K_{2,\psi}|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & c \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sqrt{\gamma} & c \\ 0 & \frac{i}{2}\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 \\ c & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & -\sqrt{1-\gamma} \\ c & c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \\ \sqrt{1-\gamma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ c & c & c \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & c \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sqrt{\gamma} & 0 \\ c & -\frac{i}{2}\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \quad \|\beta\| = \frac{1}{2} \quad \text{nie zależnego}$$

Ale wierzimy im reprezentację:

$$\tilde{K}_{0,\psi} = K_{0,\psi} \quad \tilde{K}_{1,\psi} = e^{-i\psi/2} K_{1,\psi} \quad \tilde{K}_{2,\psi} = e^{i\psi/2} K_{2,\psi}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sqrt{\gamma} & (1-\gamma)c(\frac{1}{2}-i) & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\sqrt{\gamma} & (1-\gamma)c(\frac{1}{2}-i) \end{pmatrix} \quad \left(\frac{1}{2}-i\right) = -\frac{\gamma}{2(1-\gamma)} \quad \begin{matrix} 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} = 2\gamma \\ \gamma = \frac{1}{2(1-\gamma)} \end{matrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\gamma + (1-\gamma)\left(\frac{1}{2}-i\right)^2 & c \\ c & \frac{1}{4}\gamma + \left(\frac{1}{2}-i\right)^2(1-\gamma) \end{pmatrix} \quad \|\alpha\| = \frac{1}{4}\gamma + \frac{\gamma^2}{4(1-\gamma)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)$$

$$F(S_\psi) \leq N \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

$$S_\psi \geq \sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Poszukiwanie optymalnych Krawców min. zaimplementacji
jako SDP.

To ograniczenie niemożliwe obawiając się zaniżenia
 N przez \bar{N} (z. wykład o F_α)

Widoczny jest skutek $(\alpha) \otimes (\alpha)$ jest ciągły.

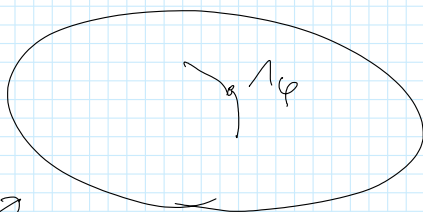
$$N(\bar{N}) \rightarrow S_{\bar{N}} = \sum_N P_N S_N \quad (\text{błąd wynika z błędów})$$

$$F(S_{\bar{N}}) \leq \sum_N P_N F(S_N) = \sum_N P_N \sqrt{\frac{1-p}{p}} N \leq \sqrt{\frac{1-p}{p}} \bar{N}$$

N ile ten przypadek jest typowy

11.5 Argument geometryczny co do liniowości składowej
 precyzji. (nie wykonywaliśmy idealnych pomiarów...)

$$|\psi\rangle \rightarrow \boxed{A_\varphi} \rightarrow S_\varphi \quad A_\varphi - \text{dwumiarowa CP}$$



zbiór wypukły kanton kwantowy $1 = p A_1 + (1-p) A_2$

$$A_\varphi = \int dx P_\varphi(x) X \quad - \text{niektóre kombinacje wypukłe kantonów z } P_\varphi(x) \text{ zmieniają się tak by } A_\varphi \text{ się zgładziło}$$

Zamiast myśleć:

$$\varphi \rightarrow A_\varphi \rightarrow S_\varphi A_\varphi(|\psi\rangle) \xrightarrow{\text{pomiar + estymacja}} \tilde{\varphi}$$

Myślenie

$$\varphi \xrightarrow{P_\varphi(x)} X \rightarrow S_\varphi = \int dx P_\varphi(x) X(|\psi\rangle) \rightarrow \tilde{\varphi}$$

Ważny wniosek: φ między innymi polibozony ma
 wartości X_i (kilon. mowa 1.000)

Fakt QFI nie może być efektywnie obliczany
 niezależnie od estymowanego parametru.

$$F_Q(\Sigma(\psi)) \leq F_Q(\psi)$$

W naszym przypadku:

$$\psi \rightarrow \int dx p(x) X(x) \xrightarrow{\Sigma} \int dx p(x) X(\psi)$$



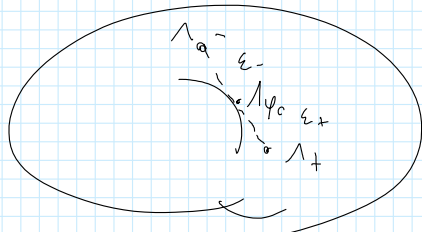
$$\Sigma(\sigma) = \int dx X(\sigma|x) \cdot X(x)$$

$$F_Q(\psi) \leq F(X) = \int dx \frac{1}{p(x)} \left(\frac{dp(x)}{d\psi} \right)^2$$

Jeli potrafisz znaleźć własną symetrię 2 $F(X)$ skądinąd
możesz znaleźć metrykę ograniczoną na $F_Q(\psi)$,

Ale parametry QFI zdają być ci Λ_{ψ_0} i $\frac{d\Lambda_{\psi}}{d\psi}|_{\psi=\psi_0}$

wystarczy je potraktować odpowiednio Λ_{ψ_0} i rachować...



Wtedy dwa kandydaci: $\Lambda_{\pm} = \Lambda_{\psi_0} \pm \frac{d\Lambda_{\psi}}{d\psi}|_{\psi=\psi_0} \cdot \epsilon_{\pm}$

Pod warunkiem że są to kandydaci czyli nie myślimy że
zobacz między innymi: ϵ_{\pm} symulacja

$$\Lambda_{\psi} = p_+(\psi) \Lambda_+ + p_-(\psi) \Lambda_-$$

$$p_{\pm}(\psi) = \frac{\epsilon_{\mp} \pm (\psi - \psi_0)}{\epsilon_+ + \epsilon_-}$$

$$\Lambda_{\psi_0} = \frac{\epsilon_- \Lambda_+ + \epsilon_+ \Lambda_-}{\epsilon_+ + \epsilon_-} = \Lambda_{\psi_0} \quad \text{OK}$$

$$\frac{d\Lambda_{\psi}}{d\psi} = \frac{\Lambda_+}{\epsilon_+} - \frac{\Lambda_-}{\epsilon_-} = \frac{d\Lambda_{\psi}}{d\psi} \quad \text{OK}$$

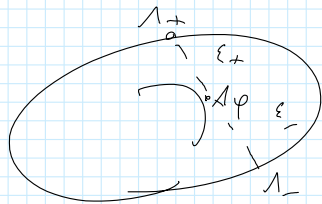
$$\left. \frac{dA_\varphi}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{A_+}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} - \frac{A_-}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} = \frac{dA_\varphi}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} \quad \text{ok}$$

$$F(A_\varphi(\varphi)) \leq F(p_\pm(\varphi)) = \frac{1}{p_+(\varphi)} \left. \left(\frac{p_+(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right|_{\varphi=\varphi_0} + \frac{1}{p_-(\varphi)} \left. \left(\frac{p_-(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right|_{\varphi=\varphi_0}$$

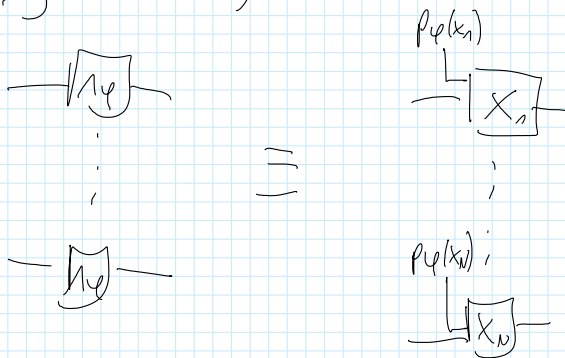
$$= \frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{\varepsilon_-} \frac{1}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} + \frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{\varepsilon_+} \frac{1}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} = \frac{1}{\varepsilon_- \varepsilon_+}$$

Optimalne są wartości ε_+ i ε_- jak najmniejsze oraz największe

ograniczenia:



Kontry niwondogje



$$F_a(A_\varphi^{(N)}(\varphi)) \leq N \cdot F(X) \leq \frac{N}{\varepsilon_- \varepsilon_+}$$

$$\Delta\varphi \geq \frac{\sqrt{\varepsilon_- \varepsilon_+}}{\sqrt{N}}$$

Wyjstomy moci wicmori geometrycne aby abstric

celbme ogromi ueni - Jeli $\varepsilon_+ > 0$ myy
sklowane klogy me (zjaniške ty pome)

Ab wici chwst dle strot niestety nie, ...

Sukhanie ξ_{\pm} w polityce

12 macierzy Choi-Janczykowskiego

Międzynarodowa $\Lambda(\beta) = \sum_i K_i \beta K_i^T$ macierzy

$$\Lambda: \mathcal{L}(\mathcal{H}_{in}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{out})$$

składające:

$$J_{\Lambda} = \Lambda \circ J(1\Phi) \langle \Phi |$$

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{\dim(\mathcal{H}_{in})} |i\rangle \otimes |i\rangle, \quad J_{\Lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{out} \otimes \mathcal{H}_{in})$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longleftrightarrow & J_{\Lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{operatorowanie } \mathbb{C}^p & & \text{operatory deterministyczne} \end{array}$$

$$\begin{aligned} J_{\Lambda} &= \sum_k K_k \otimes \sqrt{\sum_{ij} |i\rangle\langle j|} K_k^T \otimes \sqrt{\sum_{ij} |i\rangle\langle j|} = \\ &= \sum_k \underbrace{\left(\sum_i K_k |i\rangle\langle i| \right)}_{|K_k\rangle} \langle K_k| \end{aligned}$$

gdzie $|K_k\rangle$ wektory w $\mathcal{H}_{out} \otimes \mathcal{H}_{in}$

$$\text{op. Kronera} = \sum_{ij} (K_{jk} |j\rangle\langle k|) |i\rangle\langle i| = \sum_{ij} (K_{ji} |j\rangle\langle i|)$$

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{bmatrix} \rightarrow |K\rangle = \begin{bmatrix} K_{00} \\ K_{01} \\ K_{10} \\ K_{11} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \Lambda(\beta) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{in}} (J_{\Lambda} \cdot 1 \otimes \beta^T) \right.$$

Sukhanie ξ_{\pm} macierzy $J_{\Lambda} \pm \xi_{\pm} \frac{dJ_{\Lambda}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}$ i

potrzebne do polug. ξ_{\pm} potrzebne by operatory deterministyczne

Przykład Deterministyczne

$$K_{0,1} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} U_{\varphi} \quad K_{1,1} = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \sigma_2 U_{\varphi} \quad \bigcirc \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{\sigma, \varphi} = \sqrt{\frac{1+\eta}{2}} U_{\varphi} \quad K_{\sigma, \varphi} = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}} \sigma_2 U_{\varphi} \quad \text{O} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \\ \eta \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$J_{U_{\varphi}} = \frac{1+\eta}{2} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & & & \\ & 0 & & \\ & & e^{-i\varphi/2} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} (e^{-i\varphi/2} c c e^{i\varphi/2}) + \frac{1-\eta}{2} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & & & \\ & 0 & & \\ & & e^{-i\varphi/2} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} (e^{-i\varphi/2} c c e^{i\varphi/2})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta e^{i\varphi} \\ 0 & c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta e^{-i\varphi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wtedy $\varphi_c = 0$ $J_{U_{\varphi_c}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{dJ_{U_{\varphi}}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\eta \\ 0 & & & \\ i\eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{U_{\varphi_c}} + \varepsilon \frac{dJ_{U_{\varphi}}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) |\eta(1+i\varepsilon)| \leq 1$$

$$\eta^2 + \eta^2 \varepsilon^2 \leq 1$$

$$\varepsilon \leq \frac{1-\eta^2}{\eta^2}$$

DLr N konstant.

$$\Delta\varphi \geq \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\eta^2}} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bez splatania hřtů} \\ \Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{\eta^2} \sqrt{N}} \end{array} \right.$$

okazuje si že mív vyšší rychlost pro splatane sítě

↑ Příklad minimalizace pro repr. Krausův

11.6 Estymace hodnoty w obemsi def. zovani

Estymace hodnoty mgy mubivsi dabane integritantime t.

Citkany na T = k.t k. linba obplymentův

Nikly dopyzavani z. kimsi síť def. zovani at ucna t

Markovanske def. zovani : $\eta = e^{-\gamma t}$

$$\left\{ \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{1}{2} i [\mathcal{S}_1, w\sigma_2] + \frac{\gamma}{2} (\sigma_2 \mathcal{S} \sigma_2 - \mathcal{S}) \right.$$

$$F_{w,t} = t^2 \frac{N e^{-\gamma t}}{1 - e^{-2\gamma t}} \quad M_{i,j} = \frac{T}{t} \quad \text{punktův}$$

$$F_{w,T} = t^2 N T \cdot \frac{1}{t} \frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-2\gamma t}} \leq N T \frac{1}{2\gamma} = \frac{N T}{2\gamma}$$

$$F_{w,T} = t N I \cdot \frac{1}{t} \frac{1}{1 - e^{-2rt}} \leq N I \frac{1}{2r} = \frac{1}{2r}$$

Biernyca stay nie składowane: $t^2 N T \frac{1}{t} e^{-2rt} = N T t e^{-2rt}$

Max: $e^{-2rt} - 2rt e^{-2rt} = 0 \quad t = \frac{1}{2r}$

$$F_{w,T}^{\text{optimal}} = \frac{N T}{2r} \frac{1}{e}$$

Przebieg splatania Fisher minimum o e .

Tu widoczne jest wzmocnienie $\eta(t)$.

Nie ma mechanizmu: może pomóc (Pytanie czy problem)

11.7 Uwagi

- Dla $F = \text{const} \cdot N$, podejście Bayesowskie i Fisher będą dawać to samo - optymalne strategie wykorzystują splatanie "gruppek"
- Strategie równoległe vs sekwencyjne
- Związek z alg. Grubwa