Wyklad 9 - quantum metrology

16 stycznia 2013 22:27

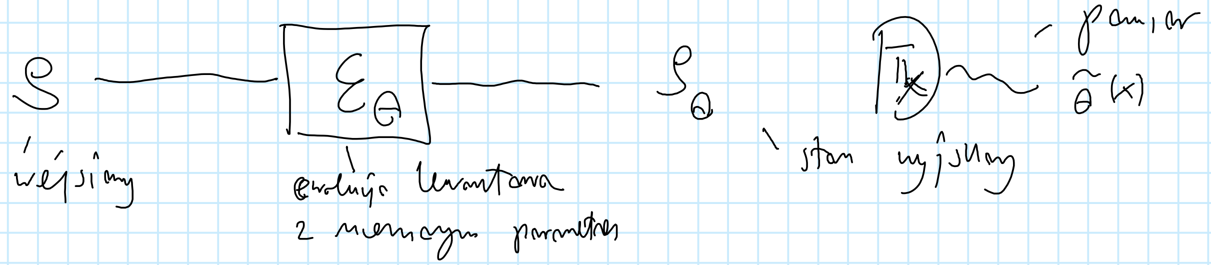
IV Metrologia kwantowa

Wykorzystanie nieklasycznych własności światła, atomów tj. np. splątanie, do zwiększenia precyzji pomiarów podstawowych wielkości fizycznych: odległości czas, pole magnetyczne, ...

- interferometry fal grawitacyjnych (stany ściśnięte światła)
- zegary atomowe (kilka jonów w st. splątanym)

1. Estymacja parametru kanału kwantowego

Większość problemów w metrologii kwantowej sprowadza się do estymacji parametru kanału kwantowego



Ogólnie:

$$\rho_\theta = \mathcal{E}_\theta(\rho) = \sum_i K_i^\theta \rho K_i^{\dagger\theta}$$

My się na razie skupimy na kanałach unitarnych

$$\mathcal{E}_\varphi(\rho) = U_\varphi \rho U_\varphi^\dagger, \quad U_\varphi = e^{iH\varphi}$$

Estymacja parametru ewolucji φ (faza), H - hamiltonian

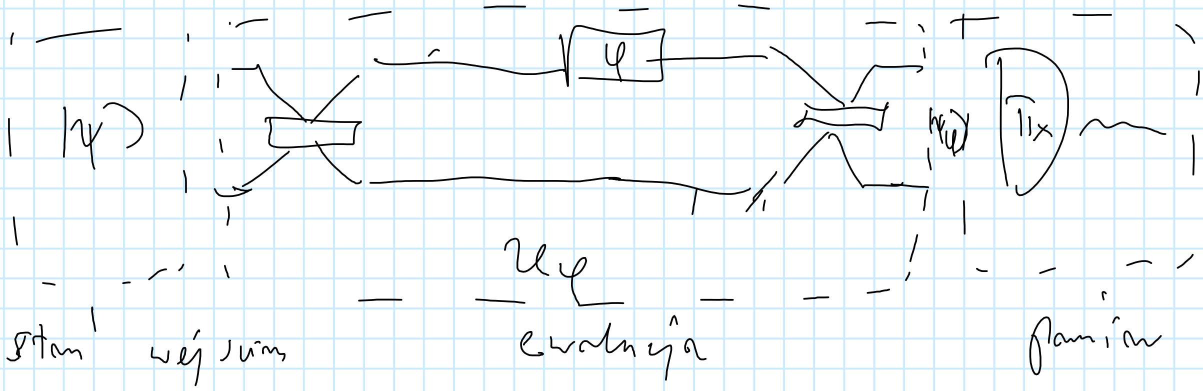
Problem: znajdź ρ, $\{\Pi_x\}$, $\tilde{\varphi}(x)$ żeby zminimalizować $\delta\varphi$

Zawsze lepiej brać st. czyste na wejściu $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Problem: $\boxed{\min_{\{|\psi\rangle, \Pi_x, \tilde{\varphi}\}} \delta\varphi}$

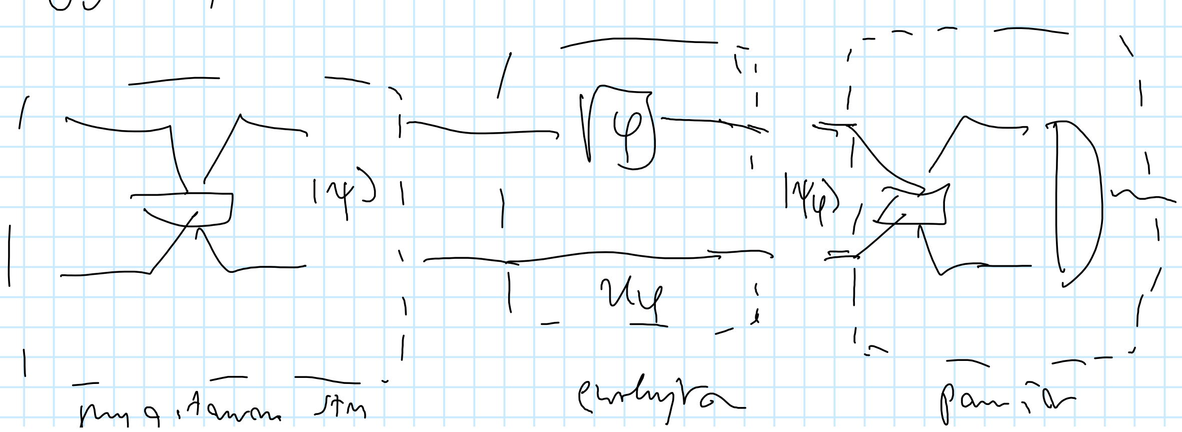
W porównaniu z estymacją stanu dodatkowa trudność – wybór optymalnego stanu wejściowego

Przykład Interferometr (jeden foton)



$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ – superpozycja fotonu w górnym, dolnym ramieniu

Wygodniej myśleć



przygotowanie stanu → ewolucja → pomiar

$$U_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } |0\rangle, |1\rangle$$

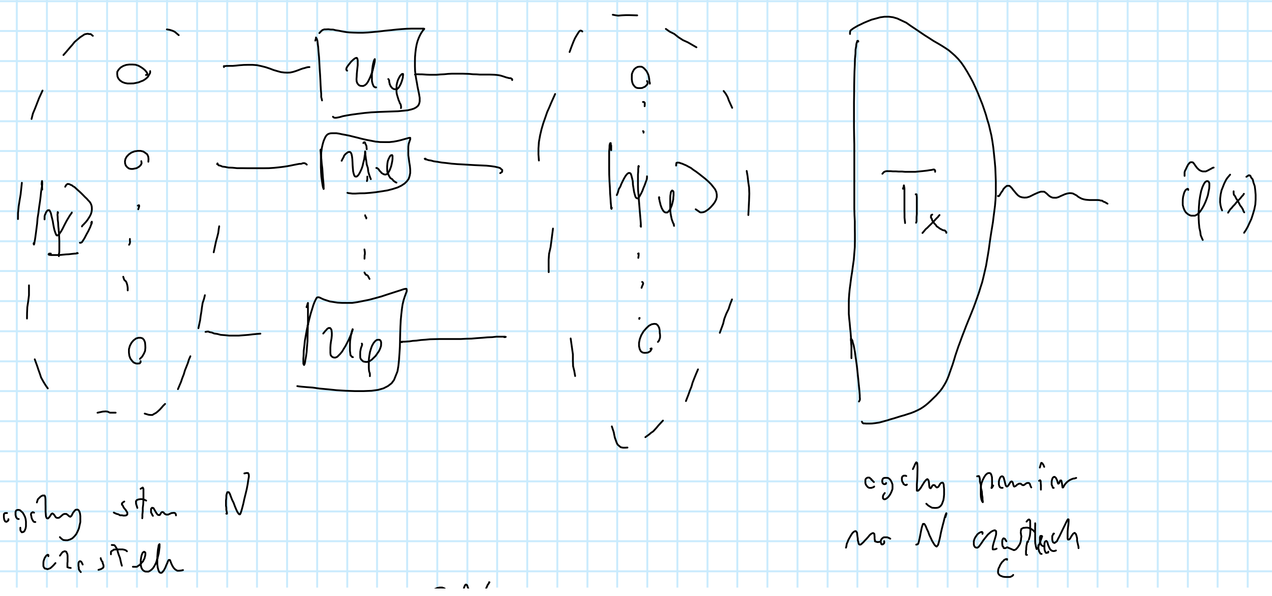
$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \xrightarrow{U_\varphi} |\psi_\varphi\rangle = a e^{i\varphi}|0\rangle + b|1\rangle$$

Jeśli stan wejściowy najlepszy:
stan z równika sfery Blocha $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

2. Estymacja parametru na N równoległych kanałach

W praktyce interesuje nas precyzja osiągana przy pomiarze wielu układów kwantowych: fotonów, atomów np. interferometria ze światłem o ustalonej (średniej) energii — liczbie fotonów.

Mamy N - układów próbkujących, które możemy przygotować w dowolnym stanie kwantowym i puszczamy przez równoległe kanały:



ogólny stan N cząstek

na N cząstkach

$$|\Psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\otimes N} \, |\Psi\rangle$$

$$p(x|\varphi) = \langle \Psi_\varphi | \Pi_x | \Psi_\varphi \rangle$$

- Jeśli są optymalne stany ~~na~~ wejściu i
- Jednego zysku możemy się spodziewać w porównaniu ze strategiami „klasycznymi": $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$

Rozważmy klasy postaci $U_\varphi = e^{iH\varphi}$

2.1 Podejście przez kwantową inf. Fishera

Wiemy że mając rodzinę stanów $|\Psi_\varphi\rangle$ w stanie uzyskać lepszej estymacji niż

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{F}} \qquad F = 4\left(\langle \dot{\Psi}_\varphi | \dot{\Psi}_\varphi \rangle - \langle \Psi_\varphi | \dot{\Psi}_\varphi \rangle\right)$$

$$|\Psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\otimes N} |\Psi\rangle = \left(e^{iH\varphi}\right)^{\otimes N} |\Psi\rangle =$$

$$= e^{i \sum_{k=1}^{N} H^{(k)} \varphi} \, |\Psi\rangle = e^{i H_N \varphi} |\Psi\rangle$$

$$\left\{ H^{(k)} = \underbrace{\mathbb{1} \otimes \ldots \otimes H \otimes \ldots \mathbb{1}}_{k\text{-te miejsce}} \right. , \qquad H_N = \sum_{k=1}^{N} H^{(k)}$$

$$F = 4\left(\langle \Psi_\varphi | H_N^2 | \Psi_\varphi \rangle - \left| \langle \Psi_\varphi | H_N | \Psi_\varphi \rangle \right|^2 \right) =$$

$$F = 4\left(\langle \psi_\varphi | H_N^2 | \psi_\varphi \rangle - \left(\langle \psi_\varphi | H_N | \psi_\varphi \rangle\right)^2\right) =$$

$$= 4\, \Delta^2 H_N$$

Szukamy stanu który zapewni największą wariancję Hamiltonianu H_N.

<u>Fakt</u> Maksymalną wariancję H uzyskamy biorąc superpozycję stanów odpowiadających skrajnym wart. własnym

$$|\psi^{opt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\lambda^{min}\rangle + |\lambda^{max}\rangle\right)$$

$$\left\{ \langle \psi | H^2 | \psi \rangle - \langle \psi | H | \psi \rangle^2 = \frac{1}{2}\left({\lambda^{max}}^2 + {\lambda^{min}}^2\right) - \frac{1}{4}\left(\lambda^{max} + \lambda^{min}\right)^2 \right.$$

Wtedy: $\Delta^2 H = \frac{1}{4}\left(\lambda^{max} - \lambda^{min}\right)^2$

Jeśli λ^{max} to max H to max H_N

$$\lambda^{max}_N = N \cdot \lambda^{max}$$

Czyli optymalny stan $|\psi^{opt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\lambda^{max}\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda^{max}\rangle + |\lambda^{min}\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda^{min}\rangle\right)$

stan splątany

Czyli $F = 4 N^2 \Delta^2 H$

$$\boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{2N\Delta H}}$$ skalowanie precyzji $\frac{1}{N}$, skalowanie Heisenberga

Jeśli ktoś nie używa splątania tylko wejść

$$|\Psi\rangle = |\psi^{opt}\rangle^{\otimes N} \quad \text{to}$$

$$\Delta^2 H_N = \sum_k \Delta^2 H = N \cdot \Delta^2 H = N \frac{1}{4}(\lambda^{max} - \lambda^{min})^2$$

$$\boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{2\sqrt{N}\,\Delta H} \quad \text{skalowanie „klasyczne"}}$$

<u>Przykład</u> N fotonów w interferometrze

$$U = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{max} = 1 \\ \lambda_{min} = 0 \end{matrix}$$

$$|\Psi^{opt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|111\ldots1\rangle + |000\ldots0\rangle \right)$$

$$\Delta^2 H = \frac{1}{4} \qquad \boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{N}}$$

Gdyby użyć fotonów nieskorelowanych

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N} \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

Mamy kwadratowy potencjalny zysk w precyzji. Intuicja:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\ldots0\rangle + |11\ldots1\rangle\right) \xrightarrow{U_\varphi^{\otimes N}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{iN\varphi}|0\ldots0\rangle + |1\ldots1\rangle\right)$$

N krotnie narosła faza

Dalej mówiąc o interferometrze optycznym będziemy używać nierozróżnialnych fotonów — zsymetryzować stany i pracować w bazie obsadzeń $|n, N-n\rangle$ — n fotonów w stanie $|0\rangle$, $N-n$ w stanie $|1\rangle$

W takim języku:

- stan optymalny $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|N,0\rangle + |0,N\rangle\right)$ (NOON)

- stan „klasyczny", brak korelacji między fotonami:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}}\,|n,N\rangle \equiv \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\right]^{\otimes N}$$

<u>Uwaga</u> Nie jest z góry oczywiste jak w praktyce osiągnąć $\Delta\varphi = \frac{1}{N}$. NOON jest dobry tylko jak już mamy bardzo dobrą wiedzę o φ

strategia etapowa.

2.2 Podejście Bayesowskie

optymalne stany do estymacji fazy przy braku wiedzy apriori

Rozważamy ogólne stany N-fotonowe (stany nierozróżnialne)

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n, N-n\rangle =: \sum_n c_n |n\rangle$$

$$|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{sym} |\psi\rangle = \sum_n c_n e^{in\varphi} |n\rangle$$

Rozkład a priori $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, f. kosztu $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4\sin^2\left(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}\right)$

Chcemy minimalizować średni koszt

$$C = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \int d\tilde{\varphi} \langle\psi| U_\varphi^\dagger \Pi_{\tilde{\varphi}} U_\varphi |\psi\rangle 4\sin^2\left(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}\right)$$

to samo sztuczka co wcześniej = indeksujemy pomiary wartością estymacji

Szukamy $\min_{\Pi_{\tilde{\varphi}}, |\psi\rangle} C$

Wiemy, że optymalne są pomiary kowariantne $\Pi_{\tilde{\varphi}} = U_{\tilde{\varphi}} \Pi_0 U_{\tilde{\varphi}}^\dagger$

$$C = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \int \frac{d\tilde{\varphi}}{2\pi} \langle\psi| \underbrace{U_\varphi^\dagger U_{\tilde{\varphi}}}_{U^\dagger_{\varphi-\tilde{\varphi}}} \Pi_0 \underbrace{U_{\tilde{\varphi}}^\dagger U_\varphi}_{U_{\varphi-\tilde{\varphi}}} |\psi\rangle 4\sin^2 \frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \langle\psi| \int d\varphi\, U_\varphi^\dagger \Pi_c U_\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2} |\psi\rangle$$

pamiętamy, że $\int \frac{d\tilde\varphi}{2\pi} U_{\tilde\varphi} \Pi_c U_{\tilde\varphi}^\dagger = \mathbb{1}$ czyli elementy diagonalne Π_c muszą być 1. Podobnie jak w przypadku estymacji fazy na $|\psi\rangle^{\otimes N}$ optymalny będzie

$$\Pi_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = |e\rangle\langle e|$$

$$|e\rangle = \sum_{n=0}^{N} |n\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi} \langle\psi| \int d\varphi\, U_\varphi^\dagger |e\rangle\langle e| U_\varphi \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right) |\psi\rangle$$

$$= \langle\psi| \frac{2}{\pi} \int d\varphi \sum_{n,n'} e^{i(n-n')} |n\rangle\langle n'| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-i\varphi}\right) |\psi\rangle$$

$$= \langle\psi| 2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} |\psi\rangle$$

Szukamy wektora własnego odpowiadającego najmniejszej wartości własnej. Da się zrobić analitycznie:

Najmniejsza wart. własna:

$$\boxed{C = \lambda_{min} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{N+2}\right) = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{N+2}\right)}$$

wektor własny:

$$|\psi\rangle = \sum^{N} c_n |n\rangle \qquad c_n = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin\frac{(n+1)\pi}{N+2}$$

wektor własny:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n |n\rangle, \quad c_n = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin \frac{(n+1)\pi}{N+2}$$

Rozwijając koszt dla dużych N

$$C \simeq 2\left(1 - 1 + \frac{\pi^2}{2(N+2)^2}\right) = \frac{\pi^2}{(N+2)^2} \approx \frac{\pi^2}{N^2}$$

Skalowanie Heisenberga ale z czynnikiem π^2

Zaleta: to nie [illegible] da się osiągnąć przynajmniej teoretycznie.