Wyklad10

9 grudnia 2012
21:10

2. Kwantowa estymacja Bayesowska

ρ_θ, ale przyjmujemy rozkład a priori $p(\theta)$

Szukamy pomiaru $\{\Pi_x\}$ i estymatora $\tilde{\theta}(x)$, minimalizującego średni koszt:

$$\bar{C} = \int d\theta\, p(\theta) \int dx\, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)\, C(\theta, \tilde{\theta}(x))$$

np. $C(\theta, \tilde{\theta}(x)) = (\theta - \tilde{\theta}(x))^2$ wtedy $\bar{C} = \Delta^2 \tilde{\theta}$

W klasycznej estymacji kiedy $p(x|\theta)$ były ustalone opt. estymator zawsze było prosto zapisać

$$\bar{C} = \int dx \left(\int d\theta\, p(\theta|x)\, C(\theta|\tilde{\theta}) \right) p(x)$$

trzeba rozwiązać $\frac{d}{d\tilde{\theta}} \int d\theta\, p(\theta|x) C(\theta, \tilde{\theta}) = 0 \Rightarrow \tilde{\theta}(x) = \ldots$

np. dla $C(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta - \tilde{\theta})^2 \Rightarrow \tilde{\theta}(x) = \int \theta\, p(\theta|x)$

Jak szukać opt. pomiarów?

Nie mamy pewności, że możemy ograniczyć się do pomiarów rzutowych. Czyli $\{\Pi_x\}$ ogólny POVM. W ogólności nieskończenie wiele operatorów....

Ogólny estymator + pomiar = ogólny pomiar

Skoro $\tilde{\theta}(x)$ - estymator to możemy ponumerować nasze op. pomiarowe przez estymowane wartości parametru:

$$\{\Pi_x\} \longrightarrow \{\Pi_{\theta'}\} \qquad \Pi_{\theta'} = \int dx\, \Pi_x\, \delta(\theta' - \tilde{\theta}(x))$$

i otrzymuję:

$$\bar{C} = \int d\theta\, p(\theta) \int d\theta'\, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_{\theta'})\, C(\theta, \theta')$$

Dalej zamiast θ' będziemy pisać $\tilde{\theta}$ żeby przypominać że ten indeks pełni rolę estymatora

$$\boxed{\bar{C} = \int d\theta\, d\tilde{\theta}\, p(\theta)\, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_{\tilde{\theta}})\, C(\theta, \tilde{\theta})}$$

$$\min_{\{\Pi_{\tilde\theta}\}} \overline{C} \quad , \quad \Pi_{\tilde\theta} \geq 0 \quad \int d\tilde\theta \, \Pi_{\tilde\theta} = \mathbb{1}$$

Bayesowski problem estymacji kwantowej

W ogólności problem b. trudny do rozwiązania

ale jeśli mamy pewne symetrie....

2.1 Problemy z symetrią

Niech G pewna grupa, np $U(1)$, $SO(2)$,...

Tym co będziemy estymować będą elementy grupy $g \in G$

np. faza dla grupy $U(1)$, obrót dla $SO(2)$,....

Niech U_g oznacza pewną reprezentację unitarną grupy G: $\quad U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$

Warunki:

a) $\rho_g = U_g \underset{\uparrow}{\rho_e} U_g^\dagger$ ~ rodzina stanów generowana przez repr. grupy

ustalony stan

np. $|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right) = \underbrace{e^{i\varphi\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}}_{U_\varphi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)}_{|\psi_0\rangle}$

repr. grupy $U(1)$

b) $\forall_{g_1, g_2, g} \; C(g_1, g_2) = C(hg_1, hg_2)$

f. kosztu — lewo niezmiennicza wzgl. działania grupy

np $C(\varphi_1, \varphi_2) = C(\varphi_1 - \varphi_2) = C\left((\varphi_1 + \xi) - (\varphi_2 + \xi)\right)$

różnica faz niezmiennicza wzgl. działania $U(1)$

c) rozkład a priori niezmienniczy wzgl. działania grupy

$$\forall_{g,h} \; dg \, p(g) = d(hg) \, p(hg)$$

np. • $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$: $\quad d\varphi \frac{1}{2\pi} = \underbrace{d(\varphi + \xi)}_{d\varphi} \frac{1}{2\pi}$

translacja nie zmienia różniczki.

• $d\theta \, d\varphi \, p(\theta, \varphi)$ jaka musi być

$p(\theta,\varphi)$ żeby była miara niezmiennicza na sferze względem obrotów

$p(\theta,\varphi) = \sin\theta$

Czyli unormowana miara:

$$\frac{1}{4\pi} d\theta\, d\varphi \sin\theta = d\mu_{\theta\varphi}$$

Ogólnie $dg\, p(g) = d\mu_g$ - miara Haara

Odtąd pisząc dg będziemy mieli na myśli miarę Haara unormowaną $\int_{g\in G} dg = 1$

Czyli w tej notacji $p(g) = 1$.

Średni koszt dla problemów z symetrią:

$$\overline{C} = \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}(U_g \rho_e U_g^{+} \Pi_{\tilde{g}})\, C(g,\tilde{g})$$

miary Haara grupy G

2.2. Pomiary kowariantne

Definicja

$\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ nazywamy kowariantnym względem grupy G $\iff \forall_{\tilde{g},h}\; U_h \Pi_{\tilde{g}} U_h^{+} = \Pi_{h\tilde{g}}$

Wniosek:

Jeśli $\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ jest kowariantny to

$$\Pi_{\tilde{g}} = U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^{+}$$

Innymi słowy pomiar kowariantny w pełni określony przez podanie jednego operatora Π_e

Twierdzenie

Jeśli problem optymalnej estymacji ma symetrię względem grupy G

$\left(dg \text{ - miara Haara},\; C(hg, hg') = C(g,g'),\; \rho_g = U_g \rho_e U_g^{+} \right)$

wokół grupy G
(dg - miara Haara , $C(hg, hg') = C(g, g')$, $\rho_g = U_g \rho_e U_g^\dagger$)
Optymalny pomiar można zawsze znaleźć
pośród pomiarów kowariantnych wzgl. grupy G

Dowód
Niech $\Pi_{\tilde{g}}^{opt}$ będzie optymalnym pomiarem
minimalizującym $\overline{C}$:

$$C_{min} = \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}(\Pi_{\tilde{g}}^{opt} \rho_g)\, C(g, \tilde{g})$$

Zdefiniujmy

$$\Pi_{\tilde{g}}^{cov} = \int dg'\, U_{g'}^\dagger\, \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt}\, U_{g'}$$

Po pierwsze $\Pi_{\tilde{g}}^{cov}$ jest kowariantny:

$$U_h \Pi_{\tilde{g}}^{cov} U_h^\dagger = \int dg'\, U_{hg'^{-1}}\, \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt}\, U_{g'h^{-1}}$$

$$\underset{=}{g' \to g'h} \int dg'\, U_{g'}\, \Pi_{g'h\tilde{g}}^{opt}\, U_{g'} = \Pi_{h\tilde{g}}$$

Po drugie daje ten sam koszt co $\Pi_{\tilde{g}}^{opt}$:

$$C_{cov} = \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}(\Pi_{\tilde{g}}^{cov} \rho_g)\, C(g, \tilde{g}) =$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}\left(\int dg'\, U_{g'}^\dagger \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'} U_g \rho_e U_g^\dagger \right) C(g, \tilde{g})$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, dg'\, \mathrm{Tr}\left(U_{g'g}^\dagger\, \Pi_{g'\tilde{g}}^{opt}\, U_{g'g}\, \rho_e \right) C(g, \tilde{g})$$

$$\begin{cases} g \to g'^{-1} g \\ \tilde{g} \to g'^{-1} \tilde{g} \end{cases}$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, dg'\, \mathrm{Tr}\left(U_g^\dagger\, \Pi_{\tilde{g}}^{opt}\, U_g\, \rho_e \right) F(g'^{-1} g, g'^{-1}\tilde{g}) =$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, dg'\, \mathrm{Tr}(\Pi_{\tilde{g}}^{opt} \rho_g)\, F(g, \tilde{g}) = F_{opt}$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, dg'\, \mathrm{Tr}(\Pi_{\tilde{g}}^{opt} \rho_g)\, F(g, \tilde{g}) = F_{opt}$$ ∎

Problem mamy. więc uprościć

$$\overline{C} = \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}(\Pi_{\tilde{g}} \rho_g)\, C(g, \tilde{g}) =$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}(U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^{\dagger} U_g \rho_e U_g^{\dagger})\, C(g, \tilde{g})$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, (\mathrm{Tr}(U_{\tilde{g}^{-1} g}^{\dagger}\, \Pi_e\, U_{\tilde{g}^{-1} g}\, \rho_e)\, C(g, \tilde{g})$$

$$g \to \tilde{g} g$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, \mathrm{Tr}(U_g^{\dagger} \Pi_e U_g\, \rho_e)\, F(g, e)$$

$$C = \int dg\, \mathrm{Tr}(\Pi_e \rho_g)\, F(g, e)$$

Końcowa postać problemu

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{C} = \int dg\, \mathrm{Tr}(\Pi_e \rho_g)\, C(g, e) \\ \min_{\Pi_e \geq 0} \overline{C}, \quad \int dg\, U_g \Pi_e U_g^{\dagger} = \mathbb{1}\end{gathered}}$$

minimalizacja już tylko po jednym operatorze!

2.3. Optymalna estymacja fazy qubitu na równiku sfery Blocha mając N kopii

$$\rho_\varphi^{(N)} = |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|^{\otimes N} \qquad |\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) =$$

$$= \underbrace{e^{i\varphi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}_{U_\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\mathcal{U}_\varphi$$

$$\rho_\varphi^{(N)} = \mathcal{U}_\varphi^{\otimes N} \rho_0^{(N)} \mathcal{U}_\varphi^{\otimes N\dagger} \qquad \rho_0^{(N)} = \left[\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)\right]^{\otimes N}$$

$$C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4\sin^2\left(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}\right) \qquad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\overline{C}^{(N)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(N)} \rho_\varphi^{(N)}\right) 4\sin^2\frac{\varphi}{2} =$$

$$\overline{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(N)} \int d\varphi\, \rho_\varphi^{(N)} \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

- $N = 1$

$$\overline{C}^{(1)} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\sin^2\frac{\varphi}{2}}_{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-i\varphi}\right)} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \cdot \begin{bmatrix} \pi & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \pi \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Szukamy $\min\limits_{\Pi_0^{(1)}} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)$ z więzem

$$\int \mathcal{U}_\varphi \Pi_0^{(1)} \mathcal{U}_\varphi^\dagger \frac{d\varphi}{2\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_0^{(1)} \geq 0$$

$$\Pi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix} \qquad \mathcal{U}_\varphi \Pi_0^{(1)} \mathcal{U}_\varphi^\dagger = \begin{bmatrix} a & b e^{-i\varphi} \\ b^* e^{i\varphi} & c \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{d\varphi}{2\pi} \begin{bmatrix} a & b e^{-i\varphi} \\ b^* e^{i\varphi} & c \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ c = 1 \end{array}$$

$$\Pi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b^* & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{żeby } \Pi_0^{(1)} \geq 0 \quad |b| \leq 1$$

$$\min_{|b| \leq 1}\left(\operatorname{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ b^* & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)\right) =$$

$$= \min_{|b| \leq 1} \operatorname{Tr}\left(2 - \operatorname{Re} b\right) = 1 \quad \text{dla } b = 1$$

Czyli $\Pi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\,|+\rangle\langle+|$

Zauważmy uwagę że $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = |+\rangle\langle+| + 2|-\rangle\langle-|$

czyli $\Pi_0^{(1)}$ „rzut" na największą wart. własną $\int d\varphi\, \rho_\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}$

Czyli $\Pi_{\tilde\varphi}^{(1)} = 2\, |\psi_{\tilde\varphi}\rangle\langle\psi_{\tilde\varphi}|$

Mamy POVM będące rzutami (nieortogonalnymi ?) na wszystkie stany równoległe.

$$\bar{C}^{(1)} = 1$$

Uwaga: taki sam średni koszt dostalibyśmy dla naiwnej strategii: $\Pi_0 = |+\rangle\langle+|$ $\Pi_1 = |-\rangle\langle-|$ i

$$\tilde\varphi(0) = 0 \qquad \tilde\varphi(1) = \pi$$

- $N > 1$

$$\bar{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Tr}\Big(\Pi_0^{(N)} \overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 1 \end{bmatrix}\right)^{\otimes N}}^{A} \Big)$$

naiwnie $\Pi_0^{(N)} = |+\rangle\langle+|^{\otimes N} \cdot 2^N$ { op na 2^N wymiarowej przestrzeni

$\bar{C}^{(N)} =$

Zauważmy że stan $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N} \in \mathcal{H}_S^{\otimes N} \subset \mathcal{H}^{\otimes N}$

podprzestrzeń symetryczna (bozonowa)

$$|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^N \big(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\big) = \sum_{m=0}^{N} c_m e^{im\varphi} |m\rangle_S$$

gdzie $|m\rangle = \sum_{\text{perm}} |\underbrace{00\ldots0}_{N-m}\underbrace{1\ldots1}_{m}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{m}}}$ — $N+1$ wekt. bazowych

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2^N}}\sqrt{\binom{N}{m}}$$

W bazie $|m\rangle_S$:

W bazie $|n\rangle_S$:

$$\rho_\varphi^{(N)} = \frac{1}{2^N}\sum_{n,n'} \sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n'}}\, e^{i(n-n')\varphi}\, |n\rangle_S\langle n'|$$

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{i\varphi} - \frac{1}{4} e^{-i\varphi}\right)\frac{1}{2^N}\sum_{n,n'}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n'}}\, e^{i(n-n')\varphi}\, |n\rangle_S\langle n'|$$

$$= \frac{1}{2^N}\cdot\left[\pi\sum_n \binom{N}{n}|n\rangle_S\langle n| - \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n-1}}\left(|n\rangle_S\langle n-1| + |n-1\rangle_S\langle n|\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2^N}\cdot\begin{bmatrix} \binom{N}{0} & -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{0}\binom{N}{1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{0}\binom{N}{1}} & \binom{N}{1} & -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{1}\binom{N}{2}} & & \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{1}\binom{N}{2}} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \binom{N}{N} \end{bmatrix}$$

Szukamy optymalnego $\Pi_0^{(N)}$. Wystarczy określić go na $\mathcal{H}_S^{\otimes N}$ bo pozostałe nie dają wkładu. Z warunku $\int \frac{d\varphi}{2\pi} U_\varphi \Pi_{0,S}^{(N)} U_\varphi = \mathbb{1}_S$ wynika

$$\Pi_{0,S}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Żeby był dodatni wyrazy pozadiagonalne $|\cdot| \le 1$.
Ponieważ w A wszystkie niezerowe pozadiagonalne ujemne, to uzyskamy najmniejszą wartość biorąc

$$\Pi_{0,S}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left(|0\rangle_S + \dots + |N\rangle_S\right)\left({}_S\langle 0| + \dots + {}_S\langle N|\right)$$

Wtedy:

$$\bar{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2^N}\left[\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} - \sum_{n=1}^{N}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n-1}}\right] =$$

wtedy:

$$\overline{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2^N}\left[\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m} - \sum_{m=1}^{N}\sqrt{\binom{N}{m}\binom{N}{m-1}}\right] =$$

$$= \left[2 - \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{\binom{N}{m}\binom{N}{m-1}}\right]$$

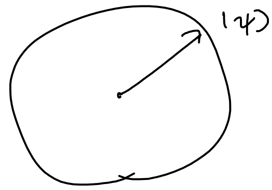
W granicy $N \to \infty$:

$$\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{m=1}^{N}\frac{N!}{\sqrt{m!\,(N-m)!\,(m-1)!\,(N-m+1)!}} = \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{m=1}^{N}\frac{N!}{m!\,(N-m)!}\sqrt{\frac{m}{N-m+1}} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} 2 - \frac{1}{N} \qquad \overline{C}^{(N)} \to \frac{1}{N}$$

czyli to co widzieliśmy z QCR.

2.4 Optymalna estymacja całkowicie nieznanego (θ) stanu qubitu



$$|\psi\rangle = |\theta,\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|1\rangle =$$
$$= e^{-\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle$$

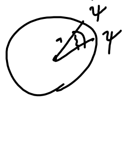
$$|\psi\rangle = |\theta,\varphi\rangle = \underbrace{e^{i\varphi\frac{1}{2}\sigma_z}\, e^{i\theta\frac{1}{2}\sigma_y}}_{U_{\theta,\varphi} = U_\psi \quad G = SU(2)/U(1)} |0\rangle$$

obroty wybranego wektora na sferze

Miara Haara $\frac{1}{4\pi}d\theta\, d\varphi \sin\theta =: d\psi$

Funkcja kosztu: $C(\psi, \tilde{\psi}) = 4\cdot\left(1 - |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2\right)$

$$\begin{cases} |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2 \approx \cos^2\frac{\gamma}{2} & \text{dla małych kątów:} \\ C = 4\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2} \approx \gamma^2 \end{cases}$$



Przyjmijmy, że mamy N kopii: $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}$

$$\overline{C} = \int d\psi \ \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \ |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}\right) \ 4\left(1-|\langle\psi|0\rangle|^2\right)$$

$$\min_{\Pi_e} \overline{C} \ , \quad \Pi_e \geq 0 \ , \quad \int d\psi \ U_\psi^{\otimes N} \Pi_e U_\psi^{\otimes N \dagger} = \mathbb{1}$$

$$= 4\Big(1 - \underbrace{\int d\psi \ \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \ |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}\right) |\langle\psi|0\rangle|^2}_{F}\Big)$$

Chcemy zmaksymalizować F. Zauważmy, że skoro $|\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N} \in \mathcal{H}_s^{\otimes N}$, to możemy ograniczyć rozważania do Π_e na tej przestrzeni

$$F = \int d\psi \ \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \ |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}\right) \cdot \mathrm{Tr}\left(|0\rangle\langle 0| \ |\psi\rangle\langle\psi|\right) =$$

$$= \int d\psi \ \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N+1}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot \underbrace{\int d\psi \ |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N+1}}_{A}\Big)$$

A – op na przestrzeni $\mathcal{H}_s^{\otimes N}$ o śladzie

$\mathrm{Tr}\, A = 1$ i niezmienny wzgl. działania

nieprzywiedlnej reprezentacji $SU(2)$, o wymiarze $N+2$

czyli $A = \frac{1}{N+2} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N+1}}$

$$= \frac{1}{N+2} \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \quad \mathbb{1}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N+1}}\right)$$

$$\int U_\psi^{s} \Pi_e U_\psi^{s} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N}} \qquad \mathrm{Tr}\,\Pi_e = N+1$$

$$\int U_g^{\dagger} \Pi_e U_g^{\dagger} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N}} \qquad \mathrm{Tr}\,\Pi_e = N+1$$

Maksimum uzyskamy biorąc $\Pi_e = |0\rangle\langle 0|^{\otimes N}(N+1)$

Wtedy $F = \frac{N+1}{N+2}$

Minimalny koszt:

$$\boxed{\overline{C}^{(N)} = 4\left(1 - \frac{N+1}{N+2}\right)}$$