Wyklad11

14 grudnia 2012
11:26

Discrimination (2 states)
Square root measurements (n states)
Quantum relative entropy
Quantum Chernoff bound

3. Rozróżnianie stanów kwantowych

3.1 Optymalne Bayesowskie rozróżnianie st. kwantowych:

Otrzymujemy jeden ze stanów ρ_i z prawdop. apriori p_i. Wykonujemy pomiar $\{\Pi_x\}$ i na podstawie wyniku wnioskujemy jaki był stan $h(x) = i$ – f. decyzji

C_{ij} – koszt wyboru ρ_i jeśli dostaliśmy ρ_j

Średni koszt:

$$C = \sum_j p_j \int dx \, \mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_j)\, C_{h(x),j}$$

Funkcję decyzji $h(x)$ możemy wciągnąć do pomiaru

$$C = \sum_j p_j \sum_i \mathrm{Tr}(\Pi_i \rho_j)\, C_{ij}$$

Szukamy: $\min_{\{\Pi_i\}} C$, $\Pi_i \geq 0$, $\sum_i \Pi_i = \mathbb{1}$

Często wybieramy: $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$

3.2 Optymalne Bayesowskie rozróżnianie dwóch stanów z minimalnym błędem.

Dwa stany: ρ_0 i ρ_1 z p_0 i p_1

Funkcja kosztu $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$

Koszt:

$$C = p_0 \, \mathrm{Tr}(\Pi_1 \rho_0) + p_1 \, \mathrm{Tr}(\Pi_0 \rho_1)$$

wiemy że $\Pi_1 = \mathbb{1} - \Pi_0$:

$$C = p_0 - \mathrm{Tr}\left([p_0\rho_0 - p_1\rho_1] \Pi_0 \right)$$

Czyli szukamy:

$$\max \mathrm{Tr}\left[(p_0\rho_0 - p_1\rho_1)\Pi_0\right], \quad \text{z warunkiem } 0 \leq \Pi_0 \leq \mathbb{1}$$

$p_0\rho_0 - p_1\rho_1$ – macierz hermitowska z dodatnimi i ujemnymi wart. własnymi

jeśli zdiagonalizujemy:

$$p_0\rho_0 - p_1\rho_1 = \begin{bmatrix} + & & & & & & & \\ & + & & & & & & \\ & & + & & & & & \\ & & & + & & & & \\ & & & & + & & & \\ & & & & & - & & \\ & & & & & & - & \\ & & & & & & & - \end{bmatrix}$$

Chcemy $\max \mathrm{Tr}((p_0\rho_0 - p_1\rho_1)\Pi_0)$, a skoro $0 \leq \Pi_0 \leq \mathbb{1}$ to najlepiej to wziąć

$\Pi_0 = P_+$ – rzut na podprzestrzeń dodatnich wart. własnych.

$\Pi_1 = \mathbb{1} - \Pi_0 = P_-$

Wtedy:

$$C = p_0 - \mathrm{Tr}\left((p_0\rho_0 - p_1\rho_1)_+ \right)$$

Równie dobrze moglibyśmy zapisać

$$C = p_1 - \mathrm{Tr}\left((p_1\rho_1 - p_0\rho_0)_+ \right) =$$

Czyli:

$$C = \frac{1}{2}\left(p_0 + p_1 - \mathrm{Tr}\left((p_0\rho_0 - p_1\rho_1)_+ - (p_0\rho_0 - p_1\rho_1)_- \right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \underbrace{\mathrm{Tr}\left| p_0\rho_0 - p_1\rho_1 \right|}_{\text{suma modułów wart. własnych}} \Big)$$

$$|A| = \sqrt{A^\dagger A}$$

$\Big\{$ G. podobne jak klasyczne $C = \frac{1}{2}\left(1 - \int dx \left| p(x|H_0)p(H_0) - p(x|H_1)p(H_1) \right|\right)$

Jeśli $\rho_0 \perp \rho_1$ (żyją w ortogonalnych przestrzeniach)

to $\mathrm{Tr}\left(|p_0\rho_0 - p_1\rho_1| \right) = 1$ i $C = 0$

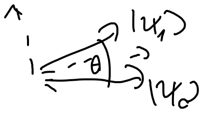
<u>Przykład</u>

Stany czyste $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ $\quad \rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$

$$\mathrm{Tr}\left| \frac{1}{2}\left(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \right) \right| = ?$$

Wszystko dzieje się w dwuwymiarowej podprzestrzeni

rozpiętej przez $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$



Możemy bez utraty ogólności zapisać

$$|\psi_0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \qquad |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2 = \cos^2\theta$$

$$|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\mathrm{Tr}\left|\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & +\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ +\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right)\right| =$$

$$\mathrm{Tr}\left|\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right)\right|$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Tr}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(1 - \sin\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2}\right)$$

Im bardziej nieortogonalne tym trudniej.

3.3. Rozróżnianie na podstawie wielu kopii

Mamy $\rho_0^{\otimes N}, \rho_1^{\otimes N}$ z p_0 i p_1

Więc czynimy:

$$C = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Tr}\left|p_0\rho_0^{\otimes N} - p_1\rho_1^{\otimes N}\right|\right)$$

Dla czystych z $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$

$$C = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^{2N}}\right)$$

Dla mieszanych może nie być łatwo obliczyć dla dużych N.

Chcemy znać zachowanie asymptotyczne dla $N \to \infty$.

Klasycznie mieliśmy ograniczenie Chernoffa:

$$C^{(N)} := 2^{-N\,C(p_0, p_1)}$$

$$C(p_0, p_1) = -\log_2 \min_{0 \le \lambda \le 1} \int dx\, p_0(x)^{\lambda}\, p_1(x)^{1-\lambda}$$

Kwantowe ograniczenie Chernoffa (2006)

$$C^{(N)} := 2^{-N\,C(\rho_0,\rho_1)}$$

$$C(\rho_0,\rho_1) = -\log_2\left[\min_{0\le s\le 1} \mathrm{Tr}\left(\rho_0^{s}\rho_1^{1-s}\right)\right]$$

Jeśli tylko ρ_0, ρ_1 nie są identyczne to asymptotyczne błąd rozróżniania spada wykładniczo.

Wszystkie stany kw. w granicy wielu kopii stają się rozróżnialne – „klasyczne"

3.4. Rozróżnianie jednoznaczne (unambiguous)

Wiemy, że nie da się rozróżnić nieortogonalnych stanów kw. idealnie bo wyprowadziliśmy wzór na minimum error i wyszło > 0 ale...

Niech $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ dwa st. nieortogonalne. Chcemy rozróżnić bezbłędnie, ale dopuszczamy możliwość, że czasem powstrzymujemy się od zgadywania:

Bez utraty ogólności:

$$|\psi_0\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}|0\rangle - \sin\tfrac{\theta}{2}|1\rangle$$
$$|\psi_1\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\tfrac{\theta}{2}|1\rangle$$

Pomiar Π_0 – jesteśmy pewni że 0

Π_1 – –||– 1

Π_2 – nie wiemy

$$0 \le \lambda \le 1$$

$$\Pi_0 = \lambda \cdot |\psi_1^\perp\rangle\langle\psi_1^\perp| \quad , \quad |\psi_1^\perp\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\Pi_1 = \lambda\, |\psi_0^\perp\rangle\langle\psi_0^\perp| \quad |\psi_0^\perp\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\Pi_? = \mathbb{1} - \Pi_0 - \Pi_1$$

$$\Pi_? = \mathbb{1} - \lambda \begin{bmatrix} 2\sin^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \lambda(1-\cos\theta) & 0 \\ 0 & 1-\lambda(1+\cos\theta) \end{bmatrix}$$

Czyli $\lambda \le \frac{1}{1+|\cos\theta|}$, jeśli $\lambda = \frac{1}{1+\cos\theta}$

Wtedy: $\Pi_? = \begin{bmatrix} \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Prawdop. że ?: $p_? = \cos^2\frac{\theta}{2}\,\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta} = |\cos\theta| = |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|$