Wyklad12

3 stycznia 2013

4. Tomografia stanów kwantowych

Częsta sytuacja eksperymentalna:

- powtarzamy wielokrotnie przygotowanie pewnego stanu kwantowego ρ.
- chcemy wykonać pomiary i stwierdzić czy rzeczywiście przygotowaliśmy dobry stan.

Pomiary wykonujemy na pojedynczej realizacji

ρ – ogólna macierz gęstości układu d-wymiarowego

nie zakładamy, że stany czyste ani nic innego...

ρ – macierz hermitowska $d\times d$ $\quad \rho \geq 0 \quad \mathrm{Tr}\,\rho = 1$

Pomiar: $\{\Pi_x\}$ $\quad \sum \Pi_i = \mathbb{1}$ $\quad \Pi_x \geq 0$

$p_\rho(x) = \mathrm{Tr}(\rho\, \Pi_x)$

Powtarzamy eksperyment N razy i uzyskujemy n_x wyników x : $\sum_x n_x = N$

Obserwujemy częstotliwości $f_x = \frac{n_x}{N}$ i na ich podstawie staramy się zrekonstruować ρ.

4.1 Pomiary informacyjnie kompletne

Ogólne ρ ma d^2-1 parametrów niezależnych

Często wygodne jest myśleć o ρ jako wektorze w przestrzeni wektorowej macierzy $d \times d$ bezśladowych

$$\rho = \frac{1}{d}\mathbb{1} + \sum_{k=1} c_k \sigma_k$$

σ_k - baza ortonormalna przestrzeni wektorowej

$Tr(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij}$

Znamy p_x (czyli dla dużych N p_x) i chcemy wrócić do ρ.

d^2-1

$p_x := p_\rho(x) = Tr(\rho\, \Pi_x)$ - liniowe równanie p_x od $\vec{c}$

Potrzebujemy co najmniej d^2-1 liniowo niezależnych równań żeby mieć $\vec{c}$ w funkcji p

Potrzebujemy więc co najmniej d^2-1 liniowo niezależnych operatorów pomiarowych Π_x
Ale pamiętajmy, że $\sum_x \Pi_x = \mathbb{1}$ czyli tak naprawdę potrzebujemy d^2 lin. niezależnych. Π_x pomiary więc tworzą bazę w przestrzeni wektorowej macierzy $d \times d$.

Definicja IC POVM (inf. complete POVM)
d^2 liniowo niezależnych op. pomiarowych
Π_x, $\sum_x \Pi_x = \mathbb{1}$, $\Pi_x \geq 0$

Uwaga: W praktyce Π_x chcemy by były rzutami na stany czyste (mają rząd 1)
Π_x wyższego rzędu są mniej informacyjne.

~~wtedy:~~ $\Pi_x = c_x |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|$ —

Mówiąc o lin. niezależności Π_x pamiętajmy że to nie to samo co lin. niezależności $|\varphi_x\rangle$

<u>Definicja</u> SIC POVM (symetryczny informacyjnie kompletny POVM)

d^2 lin. niezależnych $\Pi_x = c|\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|$

t. że $\mathrm{Tr}(\Pi_x \Pi_y) = \underset{\text{stała}}{a}$ dla $x \neq y$

<u>Uwaga</u> Możemy wyznaczyć a i c:

$$\sum_{x=1}^{d^2} \Pi_x = \mathbb{1} \Rightarrow d^2 \cdot c = d \Rightarrow c = \frac{1}{d}$$

$$d = \mathrm{Tr}\left(\sum_x \Pi_i \sum_y \Pi_j\right) = d^2 c^2 + d^2(d^2-1)\cdot a$$

$$a = \frac{d-1}{d^2(d^2-1)} = \frac{1}{d^2(d+1)}$$

Czyli:

$$\mathrm{Tr}(\Pi_x \Pi_y) = \frac{1}{d^2(d+1)} \qquad \Pi_x = \frac{1}{d}|\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|$$

$$|\langle\varphi_x|\varphi_y\rangle|^2 = \frac{1}{d+1}$$

$\Big\{$ Dla qubitu się zgadza $\mathrm{Tr}(\Pi_x \Pi_y) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ ok

Można się spodziewać że SIC POVM będą gwarantowć najefektywniejszą tomografię

4.2 Bazy wzajemnie nieobciążone (MUB)

Często robimy zwykłe pomiary von-Neumann a nie ogólne POVM.

Mierząc w jednej bazie $|e_1\rangle, \dots |e_d\rangle$ uzyskamy $d-1$ niezależnych prawdopodobieństw.

Uzyskamy $d-1$ niezależnych prawdopodobieństw.

A potrzebujemy d^2-1 równań !

Czyli musimy mieć co najmniej $d+1$ różnych pomiarów von-Neumana: $d+1$ baz ortonormalnych

$$B^{(i)} = \{ |e_1^{(i)}\rangle, \ldots |e_d^{(i)}\rangle \} \quad i = 1, \ldots, d+1$$

Jeśli bazy są bliskie sobie to dają mało niezależnych informacji, zależy nam na tym aby bazy były wzajemnie możliwie komplementarne

<u>Definicja</u>

$d+1$ baz $B^{(i)}$ tworzy MUB $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\substack{i \neq j \\ k,l}} \quad |\langle e_k^{(i)} | e_l^{(j)}\rangle|^2 = \frac{1}{d}$$

Jeśli układ w jednym ze stanów bazowych to w innych bazach pomiar daje całkowicie przypadkowy wynik.

<u>Przykład</u> Qubit.

$d+1 = 3$ $\quad |+\rangle_z = |0\rangle$, $|-\rangle_z = |1\rangle$ $\quad \{|+\rangle_z, |-\rangle_z\} = B^{(1)}$ baza σ_z

$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ $\quad \{|+\rangle_x, |-\rangle_x\} = B^{(2)}$ baza σ_x

$|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$ $\quad \{|+\rangle_y, |-\rangle_y\} = B^{(3)}$ baza σ_y

$$|\langle e_k^{(i)} | e_l^{(j)}\rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad \text{OK}$$

<u>Uwaga</u>.

W ogólności nie ma jawnych konstrukcji

MUB i SIC POVM dla dowolnych wymiarów d znane są dla niektórych wymiarów d.
MUBs znane dla d będących dowolnymi potęgami liczb pierwszych. W szczególności $d = 2^n$ czyli stany n-qubitowe.

4.3. Rekonstrukcja Max-Likelihood

$\{\Pi_x\}$ - POVM $\quad x = 1 \ldots K$

$$p_x = \mathrm{Tr}(\rho \Pi_x) \qquad \rho = \frac{1}{d}\mathbb{1} + \sum_{j=1}^{d^2-1} c_j \sigma_j$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{d^2-1} \end{bmatrix}$$

$\vec{p} = M \cdot \vec{c}$ - liniowy układ równań

M - macierz $K \times (d^2 - 1)$

Eksperyment przeprowadzamy N razy, obserwujemy n_x zdarzeń typu x: $\sum_x n_x = N$.

$\vec{n} = \{n_1, \ldots, n_K\}$

$$p_{\vec{c}}(\vec{n}) = \prod_x p(x)^{n_x} \qquad \log p(\vec{n}) = \sum_i n_x \log p_x$$

Szukamy takiego $\vec{c}$, że $p_{\vec{c}}(\vec{n})$ maksymalne
Ale $\vec{c}$ nie mogą być dowolne...

<u>Przykład</u>

Mierzymy qubit 3 razy raz w bazie: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

Mamy 6 rodzajów zdarzeń $|\pm\rangle_x, |\pm\rangle_y, |\pm\rangle_z$

Załóżmy że zmierzyliśmy: $|+\rangle_x, |+\rangle_y, |+\rangle_z$

$\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1} + c_x\sigma_x + c_y\sigma_y + c_z\sigma_z$

$$\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1} + c_x\sigma_x + c_y\sigma_y + c_z\sigma_z$$

Mierzę w bazie $(\pm)_x$ $\quad p(+x) = \frac{1}{2} + c_x \quad p(-x) = \frac{1}{2} - c_x$

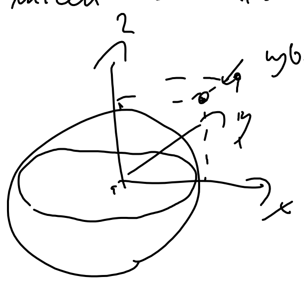
$$\mathcal{L}(\rho) = \mathcal{L}(\vec{c}) =$$

$$\log p_{\vec{c}}(n^i) = 1\log\left(\tfrac{1}{2} + c_x\right) + 0\cdot\log\left(\tfrac{1}{2} - c_x\right)$$
$$+ 1\log\left(\tfrac{1}{2} + c_y\right) + 0\log\left(\tfrac{1}{2} - c_y\right)$$
$$+ 1\log\left(\tfrac{1}{2} + c_z\right) + 0\log\left(\tfrac{1}{2} - c_z\right)$$

Maksymalne możemy wziąć $c_x, c_y, c_z \le \frac{1}{2}$ b. inaczej prawdopodobieństwa ujemne ... czyli bierzemy $c_x = c_y = c_z = \frac{1}{2}$ wtedy maximum:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

To nie jest macierz dodatnio określona ∇_c



wybraliśmy stan poza kulą Blocha

Dodatniość macierzy gęstości

Dla qubitu prosto $\underbrace{\sum (2c_i)^2}_{\text{długość wekt. Blocha}} \le 1$

Ogólne warunki na c_i b. skomplikowany

Na szczęście zbiór macierzy gęstości wypukły a funkcja $\log$(f. liniowa w ρ) wklęsła

$$\left\{\ \log\left(q x + (1-q) y\right) \ge q\log x + (1-q)\log y\right.$$

Czyli problem optymalizacyjny:

$$\max_{\rho \geq 0} \mathcal{L}(\rho)$$ — max f. wiarygodności po zbiorze wypukłym

Jeśli mamy lok. maximum $\Rightarrow$ max globalne.

- Convex optimization

Procedury numeryczne convex optimization bo efektywne (Matlab cvx package)
W nich można wstawić więz $\rho \geq 0$ bez problemu.

- Rozkład Cholesky'ego

Jeśli nie chcemy używać convex optimization można skorzystać z faktu że każdą macierz dodatnią można zapisać jako

$$\rho = T^\dagger T$$

gdzie
$$T = \begin{pmatrix} \cdot & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

macierz dolnotrójkątna wypełniona z wartościami rzeczywistymi na diagonali

{ liczba parametrów $d + d(d-1) = d^2$

Warunek $\mathrm{Tr}\,\rho = 1 \Rightarrow \mathrm{Tr}(T^\dagger T) = 1$

suma kwadratów el. diagonalnych T

$$\mathcal{L}(T) = \log p_T(\vec{n}) = \sum_i n_i \log \mathrm{Tr}(\Pi_i T^\dagger T)$$

Robimy $\max \mathcal{L}(T)$ z więzem $\mathrm{Tr}(T^\dagger T) = 1$

4.4 Niepewność rekonstrukcji

Każda rekonstrukcja powinna mieć określone stopnie błędów.
Wiemy, że w granicy $n \to \infty$, max-likelihood gwarantuje wierną rekonstrukcję a błąd estymacji jest określony przez odwrotność macierzy Fishera.

Mamy w pojedynczym eksperymencie $p_x = p_{\vec{c}}(x) = \mathrm{Tr}\left(\Pi_x \rho(\vec{c})\right)$

$$\mathbb{F}_{ij} = N \cdot \sum_{x=1}^{d^2} \frac{1}{p_{\vec{c}}(x)} \frac{\partial p_{\vec{c}}(x)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial p_{\vec{c}}(x)}{\partial c_j}$$

Macierz kowariancji dla estymowanych parametrów $\vec{c}$:

$$C_{\vec{c}} \geq \mathbb{F}^{-1}$$

Asymptotycznie będzie równość

<u>Uwagi:</u>

- Niepewności liczone z $\mathbb{F}^{-1}$ mogą być zbyt optymistyczne jeśli nie jesteśmy naprawdę w reżimie $N \to \infty$
- Metoda Max-Likelihood ma tendencję do zwracania macierzy gęstości na brzegu zbioru (z niepełnym rzędem)

wtedy F jako metoda dla liczenia błędów mało wiarygodna

- Liczenie F w parametryzacji $T^\dagger T$ może prowadzić do osobliwości dla macierzy gęstości niepełnego rzędu
- Można błędy generować przez powtarzanie rekonstrukcji na zaburzonych danych lepsze, ale czasochłonne.

- Dla małych liczebnie danych Max-likelihood bardzo podejrzany.

4.4 Bayesowska rekonstrukcja

Przyjmujemy pewien rozkład a priori $p(\rho)$

Pomiary dają nam $p(\vec{n}|\rho)$, gdzie

$\vec{n} = (n_1, \ldots, n_K)$, n_x – liczba wyników pomiaru odpowiadającego Π_x i

piszemy rozkład a posteriori

$$p(\rho|\vec{n}) = \frac{p(\vec{n}|\rho)\, p(\rho)}{p(\vec{n})}$$

gdzie $p(\vec{n}) = \int d\rho\, p(\vec{n}|\rho)\, p(\rho)$

I jako odpowiedź podajemy średnią rozkładu a posteriori:

$$\tilde{\varrho} = \int d\varrho \; \varrho \; p(\varrho|\vec{n})$$

Problemy

- Jak przyjąć $p(\varrho)$?

  Jeśli $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ to jest naturalny rozkład – jednorodny z miarą Haara $SU(d)$.
  Ale dla mieszanych nie ma jednej uznanej miary:
  - miara Buresa
  - miara Hilberta-Schmidta

- Całkowanie $\int d\varrho$ musi być numeryczne przybliżane – metody monte-carlo

Zalety

- stan $\tilde{\varrho}$ nie będzie miał tendencji do bycia na brzegu zbioru macierzy gęstości
- Naturalne błędy rekonstrukcji

$$\Delta^2 \varrho_{ij} = \int d\varrho \; (\varrho_i - \tilde{\varrho}_i)(\varrho_j - \tilde{\varrho}_j) \; p(\varrho|\vec{n})$$

$\shortparallel$

C_{ij} – macierz kowariancji

gdzie ϱ_i – parametry macierzy gęstości