Wyklad9

3 grudnia 2012
11:22

III Kwantowa teoria estymacji

Dotychczas szukaliśmy estymatorów, żeby rozróżnić od siebie rozkłady prawdopodobieństwa $p_\theta(x)$

Teraz zastąpimy:

$$p_\theta(x) \longrightarrow \rho_\theta$$

rodzina stanów kwantowych zależna od parametru(ów) θ.

Żeby estymować, musimy najpierw wykonać pomiar!

$$\rho_\theta \xrightarrow{\{\Pi_x\}} p_\theta(x) \qquad \Big\{ \sum_x \Pi_x = 1, \ \Pi_x \geq 0$$

op. pomiarowe

gdzie $p_\theta(x) = Tr(\rho_\theta \Pi_x)$

i teraz możemy już klasycznie.

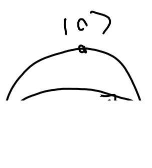
$$\theta \xrightarrow{p_\theta(x)} x \longrightarrow \tilde{\theta}(x)$$

Mamy „dwa razy" trudniej i musimy znaleźć zarówno optymalny pomiar jak i estymator.

$$\boxed{\text{Kwantowa teoria estymacji} = \text{Klasyczna teoria estymacji} + \text{poszukiwanie optymalnego pomiaru}}$$

Przykład

Qubit na równiku sfery Blocha $|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$



Otrzymujemy N kopii: $\rho_\varphi^{(N)} = \left(|\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|\right)^{\otimes N}$

Jaki wybrać pomiar i estymator, żeby optymalnie poznać φ, a rozważmy na razie $N=1$:

a) pomiar $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$, $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$

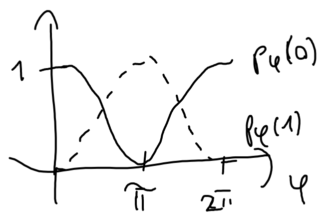
$p_\varphi(0) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $p_\varphi(1) = \frac{1}{2}$ ~ brak czułości na φ, kiepski pomysł

b) pomiar $\Pi_0 = |+\rangle\langle +|$ $\quad \Pi_1 = |-\rangle\langle -|$, $\quad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$

$$p_\varphi(0) = |\langle +|\psi_\varphi\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$$

$$p_\varphi(1) = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$p_\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^x\cos\varphi\right) \qquad x=0,1$$



Niby dobrze, ale mamy niejednoznaczność $\varphi \leftrightarrow 2\pi-\varphi$

Uznajmy, że nie przejmujemy się i ograniczamy się do $\varphi \in [0,\pi]$

Co mówi nierówność C-R na temat najlepszego estymatora:

$$\Delta\tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{F}} \qquad F = \frac{2}{1+\cos\varphi}\frac{\sin\varphi^2}{4} + \frac{2}{1-\cos\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{4} =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi}{2}\left(\frac{2}{1-\cos^2\varphi}\right) = 1$$

Wiemy, że w granicy $N\to\infty$ możemy mieć precyzję $\Delta\tilde{\varphi} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ jeśli użyjemy ML

Ale dla skończonych N nie ma gwarancji uzyskania;

$$\frac{d}{d\varphi}\log\frac{1}{2}\left(1-\cos\varphi\,(-1)^x\right) = \frac{1}{1-\cos\varphi\,(-1)^x}(-1)^x\sin\varphi =$$

$$\neq \lambda(\varphi)\left(\tilde{\varphi}(x)-\varphi\right)$$

Pytania:

Pytania:

- Czy można uzyskać lepsze asymptotyczne estymacje niż $\frac{1}{\sqrt{N}}$ jeśli zrobić niejednoczesne pomiary - kolektywne $\sum_i \Pi_i^{(N)} = \mathbb{1}_{2^N}$
- jaki optymalny pomiar dla skończonych N?

1. Kwantowe ograniczenie Cramera-Rao

Mając ρ_θ, chcemy uzyskać ograniczenie na precyzję $\delta\tilde{\theta}$, działające dla dowolnych pomiarów i estymatorów nieobciążonych (lokalnie).

Jeśli wykonujemy pomiar Π_x, $\int dx\, \Pi_x = \mathbb{1}$ to

(*) $p_\theta(x) = \mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)$

Wiemy, że klasyczna informacja Fishera:

$$F = \int dx \frac{1}{p_\theta(x)} \left(\frac{dp_\theta(x)}{d\theta}\right)^2 \quad \text{i} \quad \delta\tilde{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F}}$$

Wstawmy (*):

$$F = \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)} \left(\frac{d\,\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)}{d\theta}\right)^2 =$$

$$= \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)} \left[\mathrm{Tr}\left(\Pi_x \frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)\right]^2$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}\left[\Lambda^{(\theta)} \rho_\theta + \rho_\theta \Lambda^{(\theta)}\right]$$

Λ_θ pewien operator w ogólności zależny od θ (SLD - symmetric logarithmic derivative)

[illegible]

(SLD - symmetric logarithmic derivative)

Możemy zapisać jawnie:

Niech $|i\rangle^{(\theta)}$ - baza własna $\rho_\theta = \sum_i p_i^{(\theta)} |i\rangle^{(\theta)}\langle i|$

W tej bazie:

$$\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left[\Lambda_{ij} p_j + p_i \Lambda_{ij}\right]$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{2}{p_i+p_j}\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_{ij},$$ Λ - op. hermitowski

$$F = \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)}\left[\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\Pi_x(\Lambda\rho_\theta + \rho_\theta\Lambda)\right]\right]^2 =$$

$$\left\{ \mathrm{Tr}(A(BC+CB)) = \mathrm{Tr}(ABC + (ABC)^\dagger) \right.$$

$$= \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)}\left(\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[\Pi_x \Lambda \rho_\theta]\right)^2 \leq$$

$$\leq \int dx \frac{|\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)|^2}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathrm{Tr}(AB^\dagger)|^2 \leq \mathrm{Tr}(A^\dagger A)\,\mathrm{Tr}(B^\dagger B) \\ A = \sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta} \qquad B = \sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta} \end{array} \right.$$

$$\leq \int dx \frac{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)\cdot \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_\theta}\Lambda\Pi_x\Lambda\sqrt{\rho_\theta})}{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_\theta \Lambda \int dx\, \Pi_x \Lambda\right) = \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2) =: F_Q$$

F_Q - kw. inf. Fishera zależy tylko od ρ_θ a nie od pomiaru

Zwróćmy uwagę na podobieństwo

$$F_Q = \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2) = \langle \Lambda^2 \rangle$$

gdzie Λ – symmetric log. derivative

$$F = \left\langle \left(\frac{d}{d\theta} \log p_\theta(x)\right)^2 \right\rangle$$

log derivative

$$\boxed{\Delta\tilde{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F_Q}}} \qquad F_Q = \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2)$$

Kwantowa nierówność C–R.

1.1 Addytywność F_Q

$$\rho_\theta^{(12)} = \rho_\theta^{(1)} \otimes \rho_\theta^{(2)}$$

$$\frac{d\rho_\theta^{(12)}}{d\theta} = \frac{d\rho_\theta^{(1)}}{d\theta} \otimes \rho_\theta^{(2)} + \rho_\theta^{(1)} \otimes \frac{d\rho_\theta^{(2)}}{d\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Lambda_1 \rho_\theta^{(1)} + \rho_\theta^{(1)} \Lambda_1\right) \otimes \rho_\theta^{(2)} + \rho_\theta^{(1)} \otimes \frac{1}{2}\left[\Lambda_2 \rho_\theta^{(2)} + \rho_\theta^{(2)} \Lambda_2\right]$$

czyli $\Lambda_{12} = \Lambda_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Lambda_2$

$$F_Q^{(12)} = \mathrm{Tr}\left(\rho_\theta^{(1)} \otimes \rho_\theta^{(2)} \Lambda_{12}^2\right) = F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)} + 2\mathrm{Tr}\left(\rho_\theta^{(1)} \otimes \rho_\theta^{(2)} \cdot \Lambda_1 \otimes \Lambda_2\right)$$

$= F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)}$ bo $\mathrm{Tr}(\rho \cdot \Lambda) = 0$

$$\left\{ \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{2}(\Lambda\rho + \rho\Lambda) \qquad \frac{d\,\mathrm{Tr}\rho}{d\theta} = \mathrm{Tr}(\rho\Lambda) = 0 \right.$$

Jeśli $\rho_\theta^{(N)} = \rho_\theta^{\otimes N}$ $\quad F_Q^{(N)} = N \cdot F_Q$

Zwróćmy uwagę, że w $F_Q^{(N)}$ mogą być dowolne pomiary kolektywne.

pomiary kolektywne.

1.2 Stany czyste

$$\rho_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$$

$$\frac{d}{d\theta}|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta| = |\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|$$

$\{ |\psi_\theta'\rangle = \frac{d}{d\theta}|\psi_\theta\rangle$ - nieunormowany wektor

Możemy napisać $\Lambda = 2\left(|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\right)$

Sprawdźmy?

$$\frac{1}{2}\left[\Lambda\, |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\Lambda\right] =$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\left[\, |\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + \underline{|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle}\langle\psi_\theta| \right.$$

$$\left. + \underline{|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle}\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'| \right] =$$

$$= \frac{d\, |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|}{d\theta} \qquad \text{ok}$$

$$F_Q = \mathrm{Tr}\left(|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\,\Lambda^2\right) =$$

$$= 4\langle\psi_\theta|\left(|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\right)^2 |\psi_\theta\rangle =$$

$$= 4\langle\psi_\theta|\Big(|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|$$

$$+ |\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta'| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\,\langle\psi_\theta'|\psi_\theta'\rangle\Big)|\psi_\theta\rangle$$

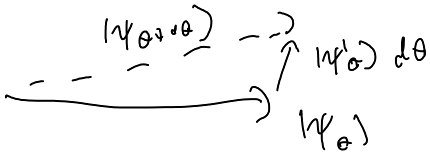
$$= 4\left(\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle^2 + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle^2 + |\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle|^2 + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta'\rangle\right)$$

$$\left\{ \left(\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle\right)^2 = 0 \right.$$

$$\Big\{\ \langle\psi_\theta|\psi'_\theta\rangle^2 + \langle\psi'_\theta|\psi_\theta\rangle + |\langle\psi'|\psi_\theta\rangle|^2 = -|\langle\psi'|\psi_\theta\rangle|^2$$

$$\boxed{F_Q = 4\left(\langle\psi'_\theta|\psi'_\theta\rangle - |\langle\psi'_\theta|\psi\rangle|^2\right)}$$

Intuicja:



Im większe $|\psi'_\theta\rangle$ tym lepiej, ale nie w kierunku $|\psi_\theta\rangle$

Przykład

$|\psi_t\rangle = e^{-\frac{iH\cdot t}{\hbar}}|\psi\rangle$ chcemy estymować czas ewolucji

$$F_Q = \frac{4}{\hbar^2}\left(\langle\psi|H^2|\psi\rangle - |\langle\psi|H|\psi\rangle|^2\right) =$$

$$= 4\,\Delta^2 H$$

$$\Delta\tilde{t} \geq \frac{\hbar}{\sqrt{4\Delta^2 H}}$$

$$\Delta^2\tilde{t}\cdot\Delta^2 H \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

„Zasada nieoznaczoności" czas – energia.

H – operator, $\tilde{t}$ – estymator

} jedyna sensowna postać bo nie ma operatora czasu

Przykład

$$|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right)$$

$$|\psi'_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\, e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$F_Q = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1$$

Czyli jeśli mielibyśmy $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N}$ to

$$F_Q^{(N)} = N \quad \Rightarrow \quad \Delta\tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

to pokazuje, że asymptotycznie pomiar lokalny w bazie $|+\rangle, |-\rangle$ byłby optymalny.

1.3 Wysycalność kwantowego C-R (QCR)

Czy zawsze jest pomiar Π_x, który w kwantowej części wyprowadzenia do wysycenia równości. $\forall x$:

(*) $\left|\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)\right| = \left|\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)\right|$

(**) $\left|\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)\right|^2 = \mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta}\right)^\dagger \sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta}\right) \cdot$

$\cdot\, \mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}\right)^\dagger \left(\sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}\right)\right)$

Warunek (**): $\sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta} = \lambda \sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}$

jeśli dodatkowo $\lambda \in \mathbb{R}$ to

$|\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)|$ także $\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_\theta}\sqrt{\Pi_x}\sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta})| =$

$$= \left|\lambda \, \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\rho_\theta}\,\Lambda\,\Pi_x \Lambda \sqrt{\rho_\theta}\right)\right| = \left|\mathrm{Tr}\left(\Pi_x \Lambda \rho_\theta\right)\right|$$

Jeśli weźmiemy $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$ gdzie $|x\rangle$ baza własna Λ

to $|x\rangle\langle x|\sqrt{\rho_\theta} = \lambda \Lambda |x\rangle\langle x|\sqrt{\rho_\theta} = \underbrace{\lambda\, p_x}_{\lambda'_x} |x\rangle\langle x|\sqrt{\rho_\theta}$

Czyli ok.

Pomiarem wysycającym QCR jest pomiar w bazie własnej SLD$_x$ ale uwaga to może zależeć od θ wtedy nie jest oczywiste jak to zastosować.

Przykład

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right) \qquad |\psi'\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$\Lambda = 2\left(|\psi'\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\psi'|\right) =$$

$$= 2\left(\frac{i}{2} e^{i\varphi}|1\rangle\left(\langle 0| + e^{-i\varphi}\langle 1|\right) - \frac{i}{2}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right) e^{-i\varphi}\langle 1|\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli baza własna:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ Nie zależy

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$ od φ !

Nam się udało z $|0\rangle, |1\rangle$, ale widać że z tych też by było dobre

(okazuje się że będzie ok dla dowolnej pary wekt. ortogonalnych na równiku sfery Blocha)

1.4 Wieloparametrowe QCR

$\rho_{\vec{\theta}}, \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)$

Klasyczne nierówności:

$$C \geq F^{-1} \qquad F_{ij} = \int dx \frac{1}{p_\theta(x)} \frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta_i} \frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta_j}$$

macierz kowariancji, macierz Fishera

Postępujemy dalej kwantowo z tym, że mamy kilka różnych SLD:

$$\frac{d\rho_{\tilde\theta}}{d\theta_i} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_i \rho_{\tilde\theta} + \rho_{\tilde\theta} \Lambda_i\right)$$

Kwantowa macierz Fishera:

$$(F_Q)_{ij} = \mathrm{Tr}\left[\rho_{\tilde\theta} \frac{1}{2}(\Lambda_i \Lambda_j + \Lambda_j \Lambda_i)\right]$$

$$\boxed{C \geq F_Q^{-1}}$$

kwantowa wieloparametryczna nierówność C-R

$$F_{ij} = \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} \left(\mathrm{Tr}\, \Pi_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i}\right) \cdot \mathrm{Tr}\left(\Pi_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j}\right)$$

$$= \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} \left(\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda_i \rho)\right) \cdot \left(\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda_j \rho)\right)$$

$$\langle \alpha | F | \alpha \rangle = \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}\, \rho_\theta \Pi_x} \left(\sum_i \alpha_i \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda_i \rho)\right)^2$$

$$= \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}\, \rho_\theta \Pi_x} \left(\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left(\sum_i \alpha_i \Pi_x \Lambda_i \rho\right)\right)^2 \leq$$

$$\leq \int dx \frac{\left|\mathrm{Tr}\left(\sum_i \alpha_i \Pi_x \Lambda_i \rho\right)\right|^2}{\mathrm{Tr}\, \rho\, \Pi}$$

$$A = \sqrt{\rho}\sqrt{\Pi} \qquad B = \sum_i \alpha_i \sqrt{\Pi}\Lambda_i\sqrt{\rho}$$

$$\leq \int dx \; \mathrm{Tr}\left(\sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \sqrt{\rho}\Lambda_i \sqrt{\Pi_x}\sqrt{\Pi_x}\Lambda_j\sqrt{\rho} \right) =$$

$$= \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \, \mathrm{Tr}(\rho \Lambda_i \Lambda_j) = \langle\alpha| \mathrm{Tr}\left(\rho \tfrac{1}{2}(\Lambda_i\Lambda_j + \Lambda_j\Lambda_i)\right) |\alpha\rangle$$

$$F \leq F_Q$$

W ogólności jeśli Λ_i i Λ_j nie komutują nie ma jednego pomiaru który mógłby wysycić QCR.