

- I. Pomiar kwantowy: wstęp filozoficzny
- II. Kwantowa teoria estymacji (również klasyczna)
- III. Metrologia kwantowa - zastosowania

Literatura:

- "Quantum theory and measurement", Wheeler, Zurek
- "Fundamentals of statistical signal processing - estimation theory", Kay
- "Quantum detection and estimation theory", Helstrom
- "Probabilistic and statistical aspects of quantum theory", Holevo

1. Aspekty filozoficzne:

1.1. Postulat pomiarowy:

- obserwabl $A = \sum \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \Rightarrow$ pomiar A - rutowanie $|\Psi\rangle$ w bazie $|e_i\rangle$ z prawdopodobieństwem $p_i = |\langle e_i | \Psi \rangle|^2$ wychodzi λ_i

$|\Psi\rangle \xrightarrow{i} |e_i\rangle$ (redukcja funkcji falowej)

- pomiar rutowny (von-Neumanna): $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$, $p_i = \langle \Psi | P_i | \Psi \rangle$
- poza pomiarem, wprowadzamy ewolucję:

$|\Psi(t)\rangle = U_t |\Psi(0)\rangle \leftarrow$ działanie operatora unitarnego

- „dualizm ewolucji $|\Psi\rangle$ ”:

- ciągła, deterministyczna ewolucja unitarna $|\Psi(t)\rangle = U_t |\Psi(0)\rangle$
- nieciągła, probabilistyczna zmiana $|\Psi\rangle$ w wyniku pomiaru

- w fizyce klasycznej: pomiar = nieinwazyjne odczytanie parametrów układu
- w fizyce kwantowej: pomiar jest fundamentalny, bo dopiero określa, które wielkości fizyczne istnieją w danym momencie

1.2. „Pre-pomiar”:

$|\Psi\rangle_S \otimes |0\rangle_M \xrightarrow{U_H} |\Phi\rangle_{SM} \leftarrow$ „pre-pomiar”, jeśli istnieje baza $|e_i\rangle$ taka, że:

$|e_i\rangle_S \otimes |0\rangle_M \xrightarrow{U_H} |e_i\rangle_S \otimes |\xi_i\rangle_M$, $|\xi_i\rangle$ - wektory ortogonalne w M

- jeżeli „wpuścimy” dowolny stan $|\Psi\rangle = \sum c_i |e_i\rangle$: $|\Psi\rangle_S \otimes |0\rangle_M \xrightarrow{U_H} \sum c_i |e_i\rangle_S \otimes |\xi_i\rangle_M = |\Phi\rangle_{SM}$
 Chwilowo założymy, że nie mamy dostępu do M

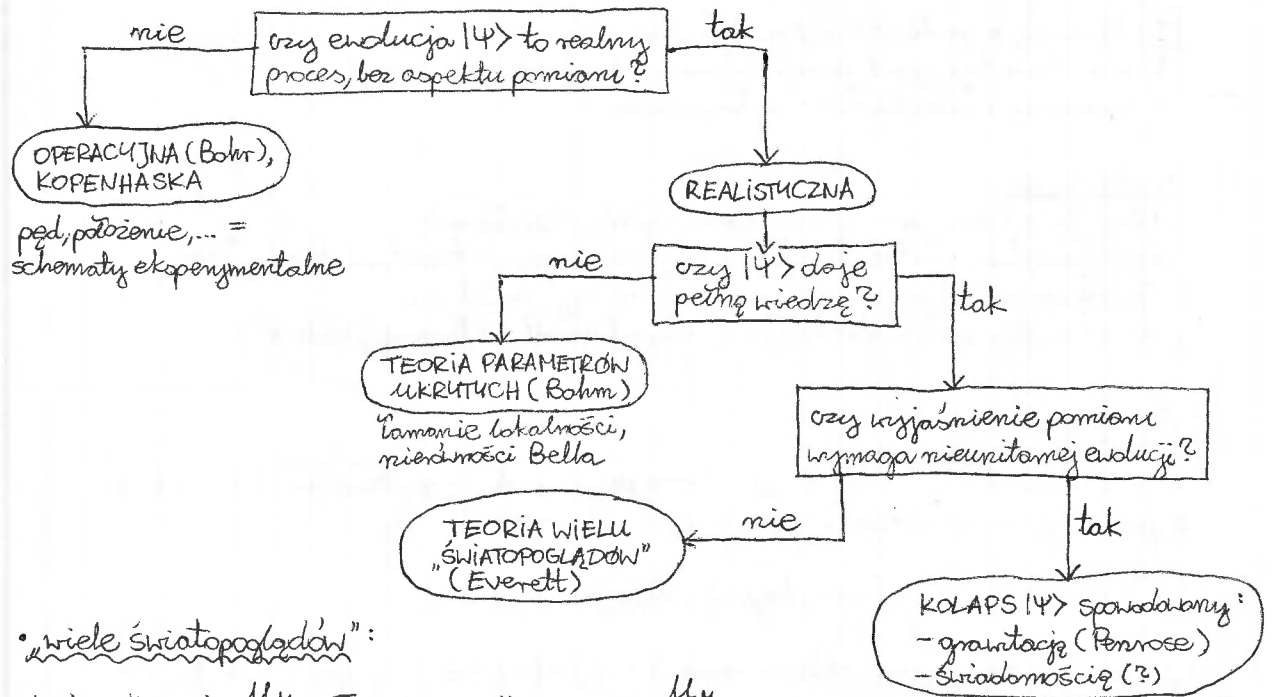
$\rho_{SM} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ - macierz gęstości dla stanu czystego $\Rightarrow \rho_S = \text{Tr}_M(\rho_{SM})$

$\rho_{SM} = \sum_{i,j} c_i^* c_j |i\rangle\langle j| \otimes |\xi_i\rangle\langle\xi_j| \Rightarrow \rho_S = \sum_{k_2} \langle k_2 | \rho_{SM} | k_2 \rangle = \sum_{i,j} |c_i c_j| \sum_{k_2} |i\rangle\langle j|$

$\rho_{SM} = \sum_{i,j} c_i^* c_j |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |\xi_i\rangle\langle\xi_j| \Rightarrow \rho_S = \sum_i |c_i|^2 |e_i\rangle\langle e_i|$ - dla „pre-pomiaru”

- $|c_i|^2 = |\langle e_i | \Psi \rangle|^2 = p_i$ - mieszanka statystyczna, brak koherencji

1.3. Interpretacje:



• „wiele światopoglądów”:

$$|\psi\rangle \otimes |\xi_{[...]} \rangle \xrightarrow{U_H} \sum_i c_i |e_i\rangle \otimes |\xi_{[...,i]} \rangle \xrightarrow{U_H}$$

„pomiar drugi raz tej samej obserwabli”: $\xrightarrow{U_H} \sum_i c_i |e_i\rangle \otimes |\xi_{[...,i]} \rangle$

• wielokrotne przygotowanie i pomiar tego samego stanu:

$$|\psi_{(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{(N)}\rangle |\xi_{[...]} \rangle \xrightarrow{U_H^{(1)}} \sum_{i_1} c_{i_1} |e_{i_1}\rangle \otimes |\psi_{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{(N)}\rangle |\xi_{[...,i_1]} \rangle \xrightarrow{U_H^{(2)}}$$

$$\xrightarrow{U_H^{(2)}} \sum_{i_1, i_2} c_{i_1} c_{i_2} |e_{i_1}\rangle \otimes |e_{i_2}\rangle \otimes |\psi_{(3)}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{(N)}\rangle |\xi_{[...,i_1 i_2]} \rangle \xrightarrow{U_H^{(3)}} \dots \text{ (itd.)}$$

1.4. „Ogólna mgłość”

- głębia (mistycyzm mechaniki kwantowej): odchodzimy od „świata tam na zewnątrz” do „świata pomiarów i obserwatorów”; pewny krok zrobiła już teoria względności – tutaj robimy więcej: świat obserwujemy od środka!

KWANTOWA ESTYMACJA - 12.10.2012 - WYKŁAD

2. Pomiany uogólnione:

- eksperyment Stern-Gerlach (pomiar pośredni)
- realistyczny detektor fotonów $\eta < 100\%$

$\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| \xrightarrow{U_{SH}} U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger$, zaś na M - pomiar rutynowy: $P_i^M = |i\rangle\langle i|$

↑
układ ↑
 urządzenie
 pomiarowe M

• prawdopodobieństwo wyniku „i”: $p_i = \text{Tr}(U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \cdot \mathbb{1}_S \otimes P_i^M) = \text{Tr}_S(\rho_S \underbrace{\langle 0| U^\dagger |i\rangle_H}_{\Pi_i^S} \underbrace{\langle i| U |0\rangle_H}_{K_i})$

• zatem: $p_i = \text{Tr}(\rho_S \Pi_i^S)$

$\Pi_i^S = K_i^\dagger K_i$ ← hermitowski i dodatnio określony
($\langle \varphi | \Pi_i^S | \varphi \rangle = \langle \varphi | K_i^\dagger K_i | \varphi \rangle = \langle \varphi' | \varphi' \rangle \geq 0$)

$\rho_i = \text{Tr}(\rho_S \Pi_i^S)$, gdzie: $(\Pi_i^S)^\dagger = \Pi_i^S$, $\Pi_i^S \geq 0$

$\sum_i \rho_i = \text{Tr}(\rho_S \sum_i \Pi_i^S) = 1 \Rightarrow \sum_i \Pi_i^S = \hat{1}_S$ (warunek zupełności)
(wystarczy wejść z sumą pod Tr w definicję!)

$\{\Pi_i^S\} : \Pi_i^S \geq 0, \sum_i \Pi_i^S = \hat{1}_S$ - reprezentuje pomiar uogólniony (POVM)

dla każdego POVM można znaleźć U_{SM} i $|0\rangle_M$ takie, że:

* $\text{Tr}_S(\rho_S \Pi_i^S) = \text{Tr}_S(\rho_S \langle 0|U^\dagger|i\rangle_M \langle i|U|0\rangle_M)$ ← szczególny przypadek tw. Neumarkera

z definicji: $U(|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_M) = \sum_i \sqrt{\Pi_i^S} |\psi\rangle_S \otimes |i\rangle_M$, bo: dowód:

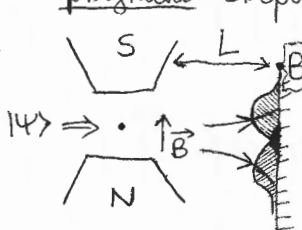
$U(|\psi'\rangle_S \otimes |0\rangle_M) = \sum_i \sqrt{\Pi_i^S} |\psi'\rangle_S \otimes |i\rangle_M$ i biorąc iloczyn skalarny po ewolucji:

$\sum_{i,i'} \langle \psi_S | \langle i' | \sqrt{\Pi_{i'}^S} \sqrt{\Pi_i^S} |\psi'\rangle_S \otimes |i\rangle_M = \sum_i \langle \psi | \Pi_i^S | \psi'\rangle_S = \langle \psi | \psi'\rangle_S$ ← zachowuje iloczyn skalarny!

- założymy, że $\rho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$ - stan czysty i z liniowości możemy uzyskać identyczne wyniki dla stanów mieszanych

$\text{Tr}(\rho_S \langle 0|U^\dagger|i\rangle_M \langle i|U|0\rangle_M) = \langle \psi | \langle 0|U^\dagger|i\rangle_M \langle i|U|\psi\rangle_S |0\rangle_M = (\text{śladowanie } |\psi\rangle_S)$
 $= \sum_{i,i'} \langle \psi | \langle i' | \sqrt{\Pi_{i'}^S} |i\rangle_M \langle i| \sum_j \sqrt{\Pi_j^S} |\psi\rangle_S |j\rangle_M = \langle \psi | \Pi_i^S | \psi\rangle_S = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \Pi_i^S) = \text{Tr}(\rho_S \Pi_i^S)$ □

przykład: eksperyment Stern-Gerlach



$B_z = B_0 + kz$, $|\psi\rangle = |s\rangle \otimes |\varphi\rangle_z$
 SPIN ↑ ← niestacjonarna funkcja falowa w kierunku z
 • na ekranie mierzymy z-ową współrzędną: Π_z^S ; $\int dz \Pi_z^S = \hat{1}_S$
 POVM

$\rho_z = \text{Tr}(\rho_S \Pi_z^S)$ ← informacja o spinie

$|s\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$ - ogólny stan spinu ; $\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$ - z definicji

$|\varphi\rangle = \frac{1}{(\int dz e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}})^{1/4}} \int dz e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} |z\rangle$ - rozkład gaussowski w położeniach

hamiltonian oddziaływania: $H = -\mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$ przez czas st

$\hat{H} = -\mu \sigma_z B_z \stackrel{B_0=0}{=} -\mu \sigma_z \cdot kz$ (ewolucja: $U = e^{-\frac{i\mu k \sigma_z z}{\hbar} st}$)

$\Pi_i^S = \langle 0|U^\dagger|i\rangle_M \langle i|U|0\rangle$, więc elementy macierne:

$(\Pi_i^S)_{nm} = \langle n| \langle 0|U^\dagger|i\rangle_M \langle i|U|0\rangle_M |m\rangle_S = \langle n| \langle 0|U^\dagger|i\rangle_M \langle i|U|0\rangle_M |m\rangle_S$, gdzie:

$|\varphi_\pm\rangle_{SM} = \exp\left(\frac{-i\mu k st \sigma_z z}{\hbar}\right) |\pm\rangle \otimes |\varphi\rangle$ (gdzie: $n, m = \{|\pm\rangle\}$)

$|\varphi_\pm\rangle_{SM} = \exp\left(\mp \frac{i\mu k st z}{\hbar}\right) |\pm\rangle \otimes |\varphi\rangle = \frac{1}{(\int dz e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} \mp \frac{i\mu k st}{\hbar} z})^{1/4}} |\pm\rangle \otimes \int dz e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} \mp \frac{i\mu k st}{\hbar} z} |z\rangle =$
 $= \left\{ |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{-\frac{ipz}{\hbar}} |p\rangle \right\} = \frac{1}{(\int dp e^{-\frac{(p \pm \alpha)^2}{4\sigma^2}})^{1/4}} |\pm\rangle \otimes \int dp e^{-\frac{(p \pm \alpha)^2}{4\sigma^2}} |p\rangle$, gdzie: $\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$

→ przez czas T (poddziałanie): ewolucja swobodna $\hat{H} = \frac{p^2}{2m}$ (gdzie: $T = \frac{L}{v}$)

$|\varphi(T)_\pm\rangle = N |\pm\rangle \otimes \int dp e^{-\frac{(p \pm \alpha)^2}{4\sigma^2}} e^{-\frac{ip^2 T}{2m\hbar}} |p\rangle$

• $|\psi_{\pm}(T)\rangle = N|\pm\rangle \otimes \int dp e^{-\frac{(p \pm \alpha)^2}{4\sigma p^2}} e^{-\frac{i p^2}{2m\hbar} T} |p\rangle = N_T |\pm\rangle \otimes \int dz e^{-\frac{(z \mp \frac{T}{m\alpha})^2}{4\sigma_T^2} \pm \frac{idz}{\hbar}} |z\rangle$,
 gdzie: $\sigma_T^2 = \sigma^2 + \frac{i\hbar T}{2m}$, $|\sigma_T|^4 = \sigma^4 + (\frac{\hbar T}{2m})^2$ ← rozmycie paczki falowej (przemianicie w położeniu!)
 $\frac{1}{\sigma_T^2} = \frac{\sigma^2 - \frac{i\hbar T}{2m}}{|\sigma_T|^4} \Rightarrow$ zatem: $(\Pi_Z^S)_m = \langle \varphi_m(T) | \hat{\mathbb{1}}_S \otimes |z\rangle \langle z| | \varphi_m(T) \rangle$; $m, m = \pm$

• $(\Pi_Z^S)_-^+ = (\Pi_Z^S)_+^- = 0$ (ortogonalne funkcje spinowe!)
 • $(\Pi_Z^S)_+^+ = |N_T|^2 e^{-\frac{(z - \frac{T}{m\alpha})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2}$
 • $(\Pi_Z^S)_-^- = |N_T|^2 e^{-\frac{(z + \frac{T}{m\alpha})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2}$, zatem macierz operatora POVM:

$\Pi_Z^S = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}|\sigma_T|^2} \begin{bmatrix} e^{-\frac{(z - \frac{T}{m\alpha})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z + \frac{T}{m\alpha})^2}{2|\sigma_T|^4} \sigma^2} \end{bmatrix}$, gdzie: $\int dz \Pi_Z^S = \hat{\mathbb{1}}_S$ i dodatnio określone

• jeżeli $\frac{\hbar T}{2m} \ll \sigma$ (małe rozszerzenie się paczki falowej):

$\Pi_Z^S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \begin{bmatrix} e^{-\frac{(z - \frac{T}{m\alpha})^2}{2\sigma^2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z + \frac{T}{m\alpha})^2}{2\sigma^2}} \end{bmatrix}$

1) jeżeli $\frac{T}{m\alpha} \approx \sigma \Rightarrow \Pi_Z^S \propto \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow p_Z = \text{Tr}(\rho_S \cdot \Pi_Z^S) \propto 1$
 - prawdopodobieństwo takie samo, niezależne od ρ_S

POMIAR STABILNY

2) jeżeli $\frac{T}{m\alpha} \gg \sigma \Rightarrow \Pi_{Z_1}^S = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & \sim 0 \end{bmatrix}$, $z_1 \approx \frac{T}{m}$

POMIAR SILNY

$\Pi_{Z_2}^S = \begin{bmatrix} \sim 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$, $z_2 \approx -\frac{T}{m}$

• Stan układu po pomiarze:

$\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| \rightarrow U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \xrightarrow{\text{pomiar}} \hat{\mathbb{1}} \otimes |i\rangle\langle i| U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \cdot \hat{\mathbb{1}} \otimes |i\rangle\langle i|$

→ stan układu po pomiarze:

$\tilde{\rho}_S^{(i)} = \text{Tr}_M(\hat{\mathbb{1}} \otimes |i\rangle\langle i| U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \cdot \hat{\mathbb{1}} \otimes |i\rangle\langle i|) = \underbrace{\langle i|U|0\rangle}_K \rho_S \underbrace{\langle 0|U^\dagger|i\rangle}_{K_i^\dagger}$

→ $\text{Tr} \tilde{\rho}_S^{(i)} = \text{Tr}(K_i \rho_S K_i^\dagger) = \text{Tr}(\rho_S \Pi_i) = p_i$ ← prawdopodobieństwo wyniku „i”

→ unormowany stan po pomiarze z wynikiem „i”: (unormowany!)

$\hat{\rho}_S^{(i)} = \frac{1}{p_i} K_i \rho_S K_i^\dagger$, $\Pi_i^S = K_i^\dagger K_i$, $\{K_i\}$ - operatory Kraussa

• $\Pi_i \rightarrow K_i$ - niejednoznaczne, bo: $K_i' = \sqrt{K_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi_i^S = K_i'^\dagger K_i' = K_i^\dagger K_i = \Pi_i$ (zatem znając wyniki pomiaru nie mamy informacji dotyczącej stanu po pomiarze!)
 ← unitarne

→ ogólniejszy kontekst:

Jeśli M nie jest umiarkowaniem pomiarowym (nie znamy wyniku „i”), to stan końcowy S :

$\rho_S^{\text{out}} = \sum_i p_i \rho_S^{(i)} = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger$ ogólna postać ewolucji układu otwartego (jeżeli na początku mamy stan produktowy)

• zachowanie śladu: $\text{Tr}(\sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger) = \text{Tr}(\underbrace{\sum_i K_i^\dagger K_i}_{\hat{\mathbb{1}}_S} \rho_S) = 1 \Rightarrow \sum_i K_i^\dagger K_i = \hat{\mathbb{1}}_S$

- Dla każdego zestawu $\{K_i\}$ takich, że $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$ istnieje U_{SH} i $|0\rangle_H$ takie, że zachodzi:

$$\sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger = \text{Tr}_H(U_{SH} \rho_S \otimes |0\rangle_H \langle 0| U_{SH}^\dagger) \quad \text{- pomiar uogólniony.}$$

- Odwzorowania dodatnie (CP map) macierzy gęstości: $L(\rho) = \rho_S^{\text{out}}$, gdzie:
 - L - odwzorowanie liniowe przekształcające operatory dodatnie na dodatnie
- Odwzorowania całkowicie dodatnie: $L \otimes I_H(\rho_{SH}) \geq 0$ (CP)
 - nie każde odwzorowanie dodatnie można zapisać przy pomocy operatora Kraussa, ale odwzorowania całkowicie dodatnie już tak!

→ Wszystkie CP-odwzorowania są postaci: $L(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$

→ przykład odwzorowania dodatniego, które nie jest CP-odwzorowaniem:

- $L(\rho) = \rho^T$ ← pozwala wykrywać splątanie układu!

* Eksperyment Stern-Gerlacha - ciąg dalszy.

- $K_z = \langle z | U_{SH} | \psi \rangle \Rightarrow (K_z)_m = \langle m | \otimes \langle z | U_{SH} | m \rangle | \psi \rangle$, gdzie: $m, n = \pm \frac{1}{2}$

$$|\phi_\pm(\tau)\rangle = N_T |\pm\rangle \otimes \int dz e^{-\frac{(z \mp \frac{I_m d}{2\sigma_T})^2}{4\sigma_T^2} \pm \frac{idz}{\hbar}} |z\rangle, \text{ więc } K_z \text{ - diagonalny:}$$

$$K_z = N_T \begin{bmatrix} e^{-\frac{(z - \frac{I_m d}{2\sigma_T})^2}{4\sigma_T^2} + \frac{idz}{\hbar}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{(z + \frac{I_m d}{2\sigma_T})^2}{4\sigma_T^2} - \frac{idz}{\hbar}} \end{bmatrix}$$

- dla stanu czystego: $\rho_S^{(i)} = \frac{1}{p_i} K_i |\psi\rangle\langle\psi| K_i^\dagger = \frac{1}{p_i} K_i |\psi\rangle\langle\psi| K_i^\dagger$ (gdzie $p_i = \langle \psi | K_i^\dagger K_i | \psi \rangle$)
 $|\psi^{(i)}\rangle$ - po pomiarze

- dla stanu spinu: $|s\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$, po pomiarze wyniku „z” mamy:

$$|s(z)\rangle = \frac{N_T}{\sqrt{p_z}} \left(c_+ e^{-\frac{(z - \frac{I_m d}{2\sigma_T})^2}{4\sigma_T^2} + \frac{idz}{\hbar}} |+\rangle + c_- e^{-\frac{(z + \frac{I_m d}{2\sigma_T})^2}{4\sigma_T^2} - \frac{idz}{\hbar}} |-\rangle \right)$$

- miar silny: $\frac{I_m d}{m} \gg |\sigma_T| \Rightarrow \begin{cases} z \approx \frac{I_m d}{2} : |s(z)\rangle \approx |+\rangle \\ z \approx -\frac{I_m d}{2} : |s(z)\rangle \approx |-\rangle \end{cases}$
 (czyli pomiar reaktory!)

- miar słaby: $\frac{I_m d}{m} < |\sigma_T| \Rightarrow z \approx \pm |\sigma_T| : |s(z)\rangle \approx c_+ e^{\frac{idz}{\hbar}} |+\rangle + c_- e^{-\frac{idz}{\hbar}} |-\rangle$
 → stan praktycznie nie zaburzony po pomiarze!

→ jeśli nie znamy wyniku „z”: $\rho_S^{\text{out}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz K_z \rho_S K_z^\dagger = \begin{bmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} e^{-\frac{d^2}{4\sigma_T^2}} \\ \rho_{-+} e^{-\frac{d^2}{4\sigma_T^2}} & \rho_{--} \end{bmatrix}$,
 gdzie: $\rho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$ oraz $\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma_T^2}$ - rozrzut pędu!

* Schemat pomiaru uogólnionego:

$$\begin{cases} |+\rangle_S \otimes |0\rangle_H \xrightarrow{U_{SH}} |+\rangle_S \otimes |\phi_+\rangle_H \\ |-\rangle_S \otimes |0\rangle_H \xrightarrow{U_{SH}} |-\rangle_S \otimes |\phi_-\rangle_H \end{cases} \quad (\text{ślad cząściowy w bazie } \{|\phi_\pm\rangle\})$$

$$\begin{aligned} \rho_S^{\text{out}} &= \text{Tr}_H(U_{SH} \rho_S \otimes |0\rangle_H \langle 0| U_{SH}^\dagger) = \text{Tr}_H(U_{SH} (\rho_{++} |+\rangle\langle+| + \rho_{+-} |+\rangle\langle-| + \rho_{-+} |-\rangle\langle+| + \rho_{--} |-\rangle\langle-|) \otimes |0\rangle_H \langle 0| U_{SH}^\dagger) = \\ &= \text{Tr}_H(\rho_{++} |+\rangle\langle+| \otimes |\phi_+\rangle\langle\phi_+| + \rho_{--} |-\rangle\langle-| \otimes |\phi_-\rangle\langle\phi_-| + \rho_{+-} |+\rangle\langle-| \otimes |\phi_+\rangle\langle\phi_-| + \rho_{-+} |-\rangle\langle+| \otimes |\phi_-\rangle\langle\phi_+|) = \\ &= \rho_{++} |+\rangle\langle+| + \rho_{--} |-\rangle\langle-| + \rho_{+-} |+\rangle\langle-| \langle\phi_+|\phi_-\rangle + \rho_{-+} |-\rangle\langle+| \langle\phi_-|\phi_+\rangle, \text{ zatem:} \end{aligned} \quad (5)$$

→ ostatecznie: $S_S^{out} = \begin{bmatrix} S_{++}, S_{+} \langle \varphi_- | \varphi_+ \rangle \\ S_{-} \langle \varphi_+ | \varphi_- \rangle, S_{--} \end{bmatrix}$

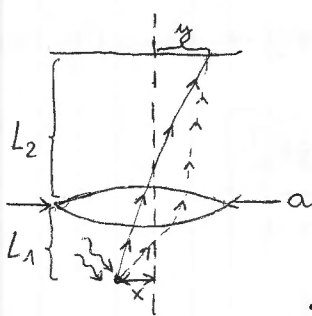
• słaby „pomiar”: $|\langle \varphi_- | \varphi_+ \rangle| \approx 1$

• silny „pomiar”: $|\langle \varphi_- | \varphi_+ \rangle| \approx 0$

3. Zasady nieoznaczoności:

3.1. Standardowa zasada nieoznaczoności:

• MIKROSKOP HEISENBERGA



→ mierzymy $y \Rightarrow x \approx \frac{L_1}{L_2} \cdot y$

• $\Delta x \approx \lambda \left(\frac{L_1}{a} \right)$ ← apertura numeryczna

→ foton przekształca przedmiotowy p_x elektronu:

• $\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \left(\frac{a}{L_1} \right) \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \approx \frac{h}{2}$ wyprowadzenie „empiryczne”
składowa pozioma

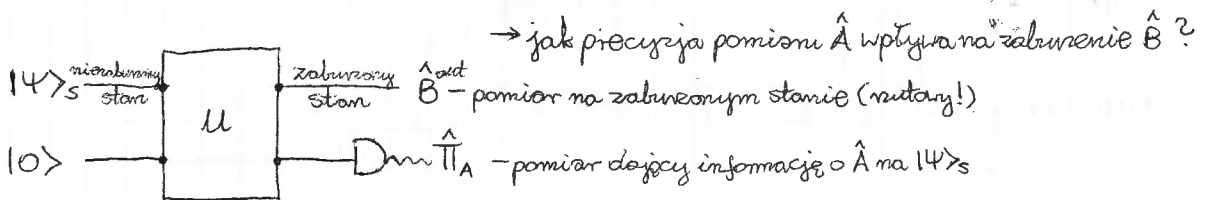
→ formalnie na studiach:

$$\begin{cases} \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\ \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \end{cases} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \text{ogólnie: } \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

* Nie równość Robertsona *

3.2. Ogólna relacja „precyzja vs. zaburzenie” dla niekomutujących obserwabli:

→ ogólny dowód: Ozawa, 2003r.



→ jak precyzja pomiaru \hat{A} wpływa na „zaburzenie” \hat{B} ?

• PRECYZJA: $|\psi^{out}\rangle_{SM} = U(|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_M)$ i mierzymy na nim $\hat{I} \otimes \hat{\Pi}_A$

→ przejście do obrazu Heisenberga: $\hat{\Pi}_A^{out} = U^\dagger \hat{I} \otimes \hat{\Pi}_A U$, gdzie: $\hat{\Pi}_A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|$

→ mierzymy $\hat{\Pi}_A^{out}$ na stanie $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$

→ idealny pomiar \hat{A} : pomiar $\hat{A}^{in} = \hat{A} \otimes \hat{I}$ na stanie $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$

• $\Delta_A := \sqrt{\langle (\hat{\Pi}_A^{out} - \hat{A}^{in})^2 \rangle}$ PRECYZJA POMIARU (średnia na stanie $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$)

• $N_A = \hat{\Pi}_A^{out} - \hat{A}^{in}$ — operator sumy pomiaru \hat{A}

→ duża precyzja pomiaru nie oznacza małego „rozróżni” wartości własnych stanów (coz zachodzi sytuacja odwrotna, jeżeli mamy słaby pomiar!) $\Delta_A \neq \Delta_B$

• ZABURZENIE: $\hat{B}^{out} = U^\dagger \hat{B} \otimes \hat{I} U$ — na stanie $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$

→ wyznik pomiaru porównujemy z pomiarem: $\hat{B}^{in} = \hat{B} \otimes \hat{I}$

• $d_B := \sqrt{\langle (\hat{B}^{out} - \hat{B}^{in})^2 \rangle}$ WIELKOŚĆ ZABURZENIA

• $D_B = \hat{B}^{out} - \hat{B}^{in}$ — operator zaburzenia pomiaru \hat{B}

• $[\Pi_A^{out}, B^{out}] = [U^\dagger \hat{\Pi}_A^{out} U, U^\dagger \hat{B} \otimes \hat{1} U] = U^\dagger [\hat{\Pi}_A^{out}, \hat{B} \otimes \hat{1}] U = 0 \leftarrow$ *żadne układy*

• $[N_A, D_B] \neq [N_A, B^{in}] + [A^{in}, D_B] + [A^{in}, B^{in}] = 0$, bo z definicji mamy:

$\begin{cases} \Pi_A^{out} = N_A + A^{in} \\ B^{out} = D_B + B^{in} \end{cases} \Rightarrow \langle [N_A, D_B] \rangle + \langle [N_A, B^{in}] \rangle + \langle [A^{in}, D_B] \rangle = -\langle [A^{in}, B^{in}] \rangle$

→ z nierówności trójkąta: $|\langle [N_A, D_B] \rangle| + |\langle [N_A, B^{in}] \rangle| + |\langle [A^{in}, D_B] \rangle| \geq |\langle [A^{in}, B^{in}] \rangle|$ (*)

• $\Delta_A \cdot \Delta_B = \sqrt{\langle N_A^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle D_B^2 \rangle} \geq \epsilon_{N_A} \cdot \epsilon_{D_B} \geq \frac{1}{2} |\langle [N_A, D_B] \rangle|$ - nierówność Heisenberga
(korzystając z zależności: $\epsilon_{N_A} = \sqrt{\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2}$, $\epsilon_{D_B} = \sqrt{\langle D_B^2 \rangle - \langle D_B \rangle^2}$)

→ wstawiając powyższe do wzoru (*) otrzymujemy:

$2\Delta_A \Delta_B + |\langle [N_A, B^{in}] \rangle + \langle [A^{in}, D_B] \rangle| \geq |\langle [A^{in}, B^{in}] \rangle|$, czyli mamy:

$\Delta_A \Delta_B + \frac{1}{2} |\langle [N_A, B^{in}] \rangle + \langle [A^{in}, D_B] \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ *ogólna zasada nieoznaczoności*

↑
• minimalna zasada nieoznaczoności, jeśli $[N_A, B^{in}] + [A^{in}, D_B] = 0$, więc w szczególności dla: $[N_A, B^{in}] = 0$ oraz $[A^{in}, D_B] = 0$

• powyższe zachodzi, jeśli np. $N_A = \hat{1} \otimes N$, $D_B = \hat{1} \otimes D$, czyli: *SZUM nie zależy od stanu |ψ⟩*

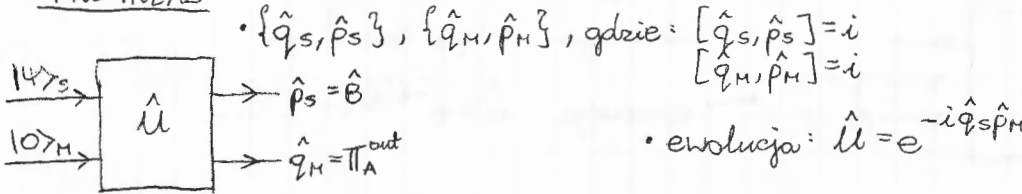
• ŁADNIEJ (ale słabiej!):

$\Delta_A \Delta_B + \frac{1}{2} |\langle [N_A, B^{in}] \rangle| + \frac{1}{2} |\langle [A^{in}, D_B] \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ i z zasady nieoznaczoności:

$\Delta_A \Delta_B + \epsilon_{N_A} \epsilon_{B^{in}} + \epsilon_{A^{in}} \epsilon_{D_B} \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \Rightarrow \Delta_A \Delta_B + (\Delta_A \epsilon_B + \epsilon_A \Delta_B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$

↓ *dotychczasowe czynniki*

* PRZYKŁAD:



• w obrębie Heisenberga: $(e^A B e^{-A} \stackrel{BCH}{=} B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \dots)$

$\begin{cases} \hat{q}_S^{out} = U^\dagger \hat{q}_S U = \hat{q}_S \\ \hat{p}_S^{out} = U^\dagger \hat{p}_S U = \hat{p}_S - \hat{p}_M \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{q}_M^{out} = U^\dagger \hat{q}_M U = \hat{q}_M + \hat{q}_S \\ \hat{p}_M^{out} = U^\dagger \hat{p}_M U = \hat{p}_M \end{cases}$

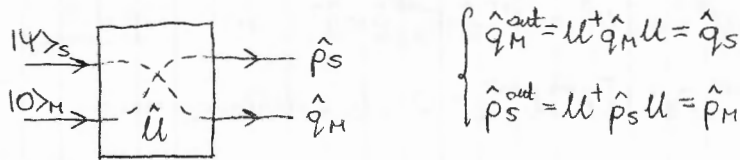
→ chcemy zmierzyć $\hat{q}_S = \hat{A}$ oraz badać zaburzenie $\hat{p}_S = \hat{B}$, zatem:

$\begin{cases} \hat{N}_A = \Pi_A^{out} - \hat{A}^{in} = \hat{q}_M + \hat{q}_S - \hat{q}_S = \hat{q}_M \\ \hat{D}_B = \hat{B}^{out} - \hat{B}^{in} = \hat{p}_S - \hat{p}_M - \hat{p}_S = -\hat{p}_M \end{cases} \Rightarrow [N_A, B^{in}], [A^{in}, D_B] = 0$, więc zachodzi: $\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}$ *zasada nieoznaczoności*

• WNIOSEK: "Stwierdzając" szerokość stanu |0⟩_M w pomiarach, można przechodzić od słabych do silnych pomiarów.

(bardzo ~~złe~~ złe określone pomiarzenie) (bardzo dobre określone pomiarzenie)

* PRZYKŁAD 2: $(\hat{A} = \hat{q}_s, \hat{B} = \hat{p}_s) \leftarrow$ zamiana cząstek



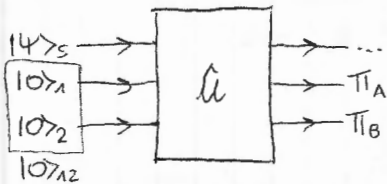
$\hat{N}_A = \hat{q}_M^{\text{out}} - \hat{q}_s = 0 \Rightarrow \Delta_A = 0$

$\hat{D}_B = \hat{p}_s^{\text{out}} - \hat{p}_s = \hat{p}_M - \hat{p}_s \Rightarrow d_B = \sqrt{\langle (\hat{p}_M - \hat{p}_s)^2 \rangle} < \infty$

• łamienie zasady nieoznaczoności

$\Delta_A \cdot d_B = 0$

3.3. Pomiar jednoczesny dwóch niekomutujących obserwabli:



• chcemy zmieniyc \hat{A} i \hat{B} , zatem:

$\begin{cases} \pi_A^{\text{out}} = U^dagger \pi_A U \\ \pi_B^{\text{out}} = U^dagger \pi_B U \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_A^2 = \langle (\pi_A^{\text{out}} - A^{\text{in}})^2 \rangle \\ \Delta_B^2 = \langle (\pi_B^{\text{out}} - B^{\text{in}})^2 \rangle \end{cases}$

→ korzystając z zależności: $[\pi_A^{\text{out}}, \pi_B^{\text{out}}] = 0$, analogicznie jak poprzednio, mamy:

$\Delta_A \Delta_B + \frac{1}{2} |\langle [N_A, B^{\text{in}}] + [N_B, A^{\text{in}}] \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$, skąd otrzymujemy:

$\Delta_A \Delta_B + \Delta_A \epsilon_B + \Delta_B \epsilon_A \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$

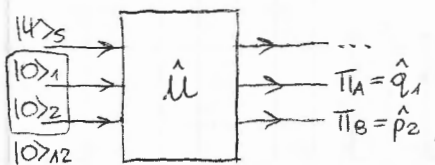
→ jeśli $[N_A, B^{\text{in}}] = [N_B, A^{\text{in}}] = 0 \Rightarrow \Delta_A \Delta_B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ zasada nieoznaczoności dla zaburzeń pomiaru

{ jeżeli $\Delta_A = 0 \nRightarrow \epsilon_A = 0$ - po prostu zerowe zaburzenie na danym stanie! }

$\sigma_{\pi_A}^2 = \langle (N_A + A^{\text{in}})^2 - \langle N_A + A^{\text{in}} \rangle^2 \rangle = \langle N_A^2 - \langle N_A \rangle^2 \rangle + \langle A^{\text{in}2} - \langle A^{\text{in}} \rangle^2 \rangle + 2 \langle N_A A^{\text{in}} \rangle - 2 \langle N_A \rangle \langle A^{\text{in}} \rangle$
(dla stanu produktowego $|\psi\rangle_s |0\rangle_{A2}$)

$\begin{cases} \sigma_{\pi_A}^2 = \sigma_{N_A}^2 + \sigma_A^2 \\ \sigma_{\pi_B}^2 = \sigma_{N_B}^2 + \sigma_B^2 \end{cases}$ niezależność stanu początkowego oraz wpływ zaburzenia!

* PRZYKŁAD 3: $\{(\hat{q}_s, \hat{p}_s), (\hat{q}_1, \hat{p}_1), (\hat{q}_2, \hat{p}_2)\}$



• mierzymy $\hat{A} = \hat{q}_s$ oraz $\hat{B} = \hat{p}_s$

ewolucja: $U = e^{-i(\hat{q}_s \hat{p}_1 - \hat{p}_s \hat{q}_2)}$

→ korzystając ze wzoru Bakera-Campbella-Hoursdorffa: (obliczyć!)

$\begin{cases} \pi_A^{\text{out}} = \hat{q}_s + \hat{q}_1 - \frac{1}{2} \hat{q}_2 \\ \pi_B^{\text{out}} = \hat{p}_s + \hat{p}_2 - \frac{1}{2} \hat{p}_1 \end{cases} \Rightarrow$ wtedy: $\begin{cases} [q_1, p] = i \\ N_A = -\hat{q}_1 \\ N_B = \hat{p}_1 \end{cases}$ i zachodzi: $\begin{cases} [N_A, B^{\text{in}}] = 0 \\ [N_B, A^{\text{in}}] = 0 \end{cases}$

$\Delta_A \Delta_B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \Rightarrow$ więc: $\Delta_q \Delta_p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_{\pi_A} \cdot \sigma_{\pi_B} = \sqrt{(\sigma_{N_A}^2 + \sigma_A^2)(\sigma_{N_B}^2 + \sigma_B^2)}$

$\sigma_{\pi_A} \cdot \sigma_{\pi_B} = \sqrt{(\sigma_{N_A}^2 + \sigma_A^2)(\sigma_{N_B}^2 + \sigma_B^2)} \geq 2 \sqrt{\sigma_{N_A} \sigma_{N_B} \cdot \sigma_A \sigma_B} \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ (rozpuł się podwoja!)

* WNIOSK: Podczas jednoczesnego pomiaru „q” i „p” zachodzi:

$\sigma_q^{\text{joint}} \cdot \sigma_p^{\text{joint}} \geq 1$ OGÓLNA ZASADA NIEOZNACZONOŚCI

4. Kwantowy efekt Zenona:

- stan początkowy $|\psi\rangle = |0\rangle$, ewolucja zgodna z hamiltonianem \hat{H}

$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |0\rangle = a_0(t)|0\rangle + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)|i\rangle$

- po czasie t mierzymy w bazie $|i\rangle \rightarrow$ jakie jest prawdopodobieństwo p , że po pomiarze otrzymamy stan początkowy $|0\rangle$?

$p_0 = |\langle 0 | e^{-i\hat{H}t} |0\rangle|^2 \approx |\langle 0 | 1 - i\hat{H}t - \frac{1}{2}\hat{H}^2 t^2 |0\rangle|^2 = \langle 0 | 1 - i\hat{H}t - \frac{\hat{H}^2 t^2}{2} |0\rangle \langle 0 | 1 + i\hat{H}t - \frac{\hat{H}^2 t^2}{2} |0\rangle =$
 $= 1 - it\langle \hat{H} \rangle + it\langle \hat{H} \rangle + t^2 \langle \hat{H} \rangle^2 - \frac{t^2}{2} \langle \hat{H}^2 \rangle - \frac{t^2}{2} \langle \hat{H}^2 \rangle + O(t^3) = 1 - t^2 \Delta^2 \hat{H} + \dots$
 (Wariancja \hat{H})

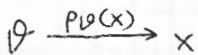
- całkowity czas ewolucji $T = Nt$ (t - małe, N - duże)

- jakie jest prawdopodobieństwo, że przez czas T stan początkowy nie zmienia się?

$p^{(N)} = p_0^N = (1 - t^2 \Delta^2 \hat{H})^N = (1 - \frac{T^2}{N^2} \Delta^2 \hat{H})^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - N \cdot \frac{T^2}{N^2} \Delta^2 \hat{H} = 1 - \frac{T^2 \Delta^2 \hat{H}}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$
 (bardzo częste pomiary hamują ewolucję układu!) POMIARY RZUTOWE

II. Klasyczna teoria estymacji

1. Estymacja parametru (klasyczna)



(nieznany parametr)

(obserwacje)

$p_\theta(x)$ - rozkład rozkładu prawdopodobieństwa dla konkretnego parametru θ

ZADANIE: Znajdź x oraz $p_\theta(x)$, wyestymować θ $\tilde{\theta}(x)$ - estymator

• PRZYKŁAD: $x = (x_1, \dots, x_N)$ - rozkład niezależny, tj. $p(x) = p(x_1) \cdot \dots \cdot p(x_N)$

$x_i \sim N(\theta, \sigma^2)$ - rozkład Gaussa, tj. $p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}}$

\rightarrow jaki jest „dobry” estymator? np. $\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ / $\tilde{\theta}(x) = x_1$ (?)

1.1. Optymalne estymatory:

• nieobciążoność estymatora:

\rightarrow średnia z estymatora: $\langle \tilde{\theta} \rangle = \int dx p_\theta(x) \tilde{\theta}(x) = \theta$ NIEOBCIĄŻAŁOŚĆ

$\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow \langle \tilde{\theta} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle = \frac{N\theta}{N} = \theta$ (również: $\tilde{\theta}(x) = x_1 \Rightarrow \langle \tilde{\theta} \rangle = \langle x_1 \rangle = \theta$)

• optymalność estymatora:

\rightarrow Wariancja z estymatora: $\Delta^2 \tilde{\theta} = \langle (\tilde{\theta} - \theta)^2 \rangle = \int dx p_\theta(x) (\tilde{\theta}(x) - \theta)^2$

• estymator optymalny \equiv minimalna $\Delta^2 \tilde{\theta}$ (ale zależy od θ)

• „minimum variance unbiased estimator” (MVU)

- nieobciążony i mający minimalną wariancję dla wszystkich θ

• UWAGA: MVU - może nie istnieć, np. jeżeli w różnych przedziałach θ , różne estymatory są optymalne

$\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow \Delta^2 \tilde{\theta} = \langle (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \theta)^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \langle (\sum_{i=1}^N x_i - N\theta)^2 \rangle =$
 $= \frac{1}{N^2} \langle (\sum_{i,j=1}^N (x_i - \theta)(x_j - \theta)) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \langle (x_i - \theta)(x_j - \theta) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \langle (x_i - \theta)^2 \rangle =$
 $= \frac{1}{N^2} (N\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{N}$ ← dla rozkładu Gaussa! (9)

1.2. Ograniczenie Cramera-Rao:

• założenia: $\langle \tilde{\vartheta} \rangle = \int p_{\vartheta}(x) \tilde{\vartheta}(x) dx = \vartheta$ - nieobciążoność, czyli:

(*) $\int dx \cdot \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} \tilde{\vartheta}(x) = 1$ - lokalna nieobciążoność

(**) $\int dx \cdot \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} = 0$ (trywialne, jeżeli można zamienić całkowanie i różniczkowanie)

* TWIERDZENIE: $\Delta^2 \tilde{\vartheta} \geq \frac{1}{F}$, gdzie: $F = \int dx \cdot \frac{1}{p_{\vartheta}(x)} \left(\frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} \right)^2$ - informacja Fischera

• dowód:
$$\int dx p_{\vartheta}(x) (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 \cdot \int dx \cdot \frac{1}{p_{\vartheta}(x)} \left(\frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} \right)^2 =$$

$$= \int dx [\sqrt{p_{\vartheta}(x)} (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)]^2 \cdot \int dx \left[\frac{1}{\sqrt{p_{\vartheta}(x)}} \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} \right]^2 \stackrel{C-S}{\geq} \text{(nierówność Schwarz)} \\ \stackrel{C-S}{\geq} \left[\int dx \sqrt{p_{\vartheta}(x)} (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta) \frac{1}{\sqrt{p_{\vartheta}(x)}} \cdot \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} \right]^2 = \left[\underbrace{\int dx \tilde{\vartheta}(x) \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta}}_{=1 (*)} - \vartheta \underbrace{\int dx \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta}}_{=0 (**)} \right]^2,$$

→ zatem: $\Delta^2 \tilde{\vartheta} \cdot F \geq 1$ □

• UWAGA: $\left\{ \begin{array}{l} 1) F = \left\langle \left(\frac{d}{d \vartheta} \log p_{\vartheta}(x) \right)^2 \right\rangle \\ \text{inny} \\ \text{zapis} \\ 2) F = - \left\langle \frac{d^2}{d \vartheta^2} \log p_{\vartheta}(x) \right\rangle \end{array} \right.$ ← (pokazać równoważność tych warunków z definicją)

• addytywność F: $p_{\vartheta}^{(12)}(x_1, x_2) = p_{\vartheta}^{(1)}(x_1) \cdot p_{\vartheta}^{(2)}(x_2) \Rightarrow F^{(12)} = F^{(1)} + F^{(2)}$
(można pokazać z zapisu (2))

• PRZYKŁAD: $X_i \sim N(\vartheta, \sigma^2)$ - rozkład Gaussa

$$p_{\vartheta}(x) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \vartheta)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \vartheta)^2}, \text{ zatem:}$$

$$F = \left\langle \frac{d^2}{d \vartheta^2} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \vartheta)^2 \right) \right\rangle = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N 1 = \frac{N}{\sigma^2} \Rightarrow \Delta^2 \tilde{\vartheta} \geq \frac{1}{F} = \frac{\sigma^2}{N}$$

→ zatem poprzednio „zapadliśmy” najlepszy, lokalnie nieobciążony estymator!

• Wyszycanie nierówności Cramera-Rao (C-R)

- wyszycanie, jeżeli nierówność Cauchy-Schwarza (C-S) jest równością!

$$\frac{1}{\sqrt{p_{\vartheta}(x)}} \cdot \frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} = \lambda(\vartheta) \sqrt{p_{\vartheta}(x)} (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta) \Rightarrow \frac{1}{p_{\vartheta}(x)} \cdot \left(\frac{d p_{\vartheta}(x)}{d \vartheta} \right) = \lambda(\vartheta) (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta), \text{ czyli:}$$

$$\boxed{\frac{d}{d \vartheta} \log p_{\vartheta}(x) = \lambda(\vartheta) (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)}$$

Warunek wyszycalności nierówności C-R (sprawdzić dla rozkładu Gaussa)

→ wtedy: $\tilde{\vartheta}(x)$ - optymalny estymator (EFERYWNY), $\lambda(\vartheta) = F$

• PRZYKŁAD: $X_i \sim N(\vartheta, \sigma^2)$ - rozkład Gaussa

$$p_{\vartheta}(x) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \vartheta)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \log p_{\vartheta}(x) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \vartheta)^2}{2\sigma^2}, \text{ więc:}$$

$$\frac{d}{d \vartheta} \log p_{\vartheta}(x) = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \vartheta)}{\sigma^2} =: \lambda(\vartheta) (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)$$

- biorąc $\tilde{\vartheta}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$, dostajemy: $\lambda(\vartheta) = \frac{N}{\sigma^2} \equiv F$ ← estymator efektywny

1.3. Wieloparametrowe ograniczenie C-R

• $p_{\vec{\theta}}(x)$, gdzie: $x = [x_1, \dots, x_N]$, $\vec{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_k]$ ← w ogólności skorelowane!

* TWIERDZENIE:

- założenia: $\int dx \vec{\theta}(x) p_{\vec{\theta}}(x) = \vec{\theta}$ - nieobciążoność (*)
- $\int dx \vec{\nabla} p_{\vec{\theta}}(x) = 0$ - regularność (**)

→ wtedy $C_{\vec{\theta}} \geq F^{-1}$, czyli: $C_{\vec{\theta}} - F^{-1} \geq 0$ - dodatnio określone

• $(C_{\vec{\theta}})_{ij} = \int dx (\tilde{\theta}_i - \theta_i)(\tilde{\theta}_j - \theta_j) p_{\vec{\theta}}(x)$ - macierz kowariancji

• $(F)_{ij} = \int dx \frac{1}{p_{\vec{\theta}}(x)} \frac{\partial p_{\vec{\theta}}(x)}{\partial \theta_i} \frac{\partial p_{\vec{\theta}}(x)}{\partial \theta_j}$ - macierz Fishera

• $(F)_{ij} = - \int dx p_{\vec{\theta}}(x) \frac{\partial^2 \log p_{\vec{\theta}}(x)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = - \langle \frac{\partial^2 \log p_{\vec{\theta}}(x)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \rangle$ - inny zapis!

• Dowód: (*) $\Rightarrow \int dx \tilde{\theta}_i(x) \frac{\partial p_{\vec{\theta}}(x)}{\partial \theta_j} = S_{ij}$ - lokalna nieobciążoność

- niech \vec{a}, \vec{b} - ustalone wektory

• $(\int dx \vec{a}^T (\vec{\theta}(x) - \vec{\theta})(\vec{\theta}(x) - \vec{\theta})^T \vec{a} p_{\vec{\theta}}(x)) \cdot (\int dx \frac{1}{p_{\vec{\theta}}(x)} \vec{b}^T (\vec{\nabla} p_{\vec{\theta}}(x)) (\vec{\nabla} p_{\vec{\theta}}(x))^T \vec{b}) \stackrel{CS}{\geq} \int dx \vec{a}^T (\vec{\theta}(x) - \vec{\theta})(\vec{\nabla} p_{\vec{\theta}}(x))^T \vec{b} \stackrel{CS}{\geq} |\int dx \vec{a}^T (\vec{\theta}(x) - \vec{\theta})(\vec{\nabla} p_{\vec{\theta}}(x))^T \vec{b}|^2 = (\vec{a}^T \hat{1} \vec{b})^2 = (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2$, gdzie:

- warunek lokalnej nieobciążoności: $\int dx \tilde{\theta}_i(x) \cdot (\vec{\nabla} p_{\vec{\theta}}(x))^T = \hat{1}$

- oraz korzystamy z warunku (**) i możliwości zamiany różniczkowania i całkowania

- zatem: $\vec{a}^T C_{\vec{\theta}} \vec{a} \cdot \vec{b}^T F \vec{b} \geq (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2$

- biorąc: $\vec{a} = \vec{b} = \hat{e}_i$ - jedynka na i-tej pozycji $\Rightarrow (C_{\vec{\theta}})_{ii} \cdot F_{ii} \geq 1 \Rightarrow \Delta^2 \tilde{\theta}_i \geq \frac{1}{F_{ii}}$ □

- wzrostek silniejszy: $\vec{b} = F^{-1} \vec{a}$ (zakładamy odwracalność macierzy Fishera, bo dodatnio określona i wszystkie wartości własne niezerowe, bo zależy od wszystkich parametrów!)

- wtedy otrzymujemy:

$\vec{a}^T C_{\vec{\theta}} \vec{a} \cdot \vec{a}^T \overbrace{(F^{-1})^T F F^{-1}}^{\substack{F^{-1} \\ \text{F}^{-1} \text{-zsymetri}}} \vec{a} \geq (\vec{a}^T F^{-1} \vec{a})^2 \Rightarrow \forall \vec{a}: \vec{a}^T C_{\vec{\theta}} \vec{a} \geq \vec{a}^T F^{-1} \vec{a}$, (**)

• zatem: $\Delta^2 \tilde{\theta}_i \geq (F^{-1})_{ii}$ □

• FAKT: $(F^{-1})_{ii} \geq \frac{1}{F_{ii}}$, gdyż zachodzi związek:

• $1 = |\hat{e}_i^T \sqrt{F} \sqrt{F^{-1}} \hat{e}_i|^2 \leq (\hat{e}_i^T \sqrt{F} \sqrt{F^{-1}} \hat{e}_i) (\hat{e}_i^T \sqrt{F^{-1}} \sqrt{F} \hat{e}_i) = F_{ii} \cdot (F^{-1})_{ii}$ □

→ ostatecznie z warunku (**) mamy: $C_{\vec{\theta}} \geq F^{-1}$ NIERÓWNOŚĆ CRAMERA-RAO

• wysytalność: $\vec{\nabla} \log p_{\vec{\theta}}(x) = \Lambda(\vec{\theta})(\vec{g}(x) - \vec{\theta})$, gdzie: $\Lambda \equiv F$
 ← optymalny (efektywny) estymator

1.4. Modele liniowe: $\vec{X} = H\vec{\theta} + \vec{W}$, gdzie: $W_i \sim N(0, \sigma^2)$, $H \in \mathbb{R}^{N \times k}$

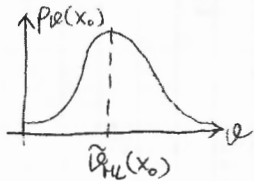
→ zakładamy $N > k$ (układ nadzupętany) oraz H -rzędu k (niezależne zmienne θ_i)

• $p(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^2)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\vec{x} - H\vec{\theta})^T(\vec{x} - H\vec{\theta})}$ - zadamy rozkład prawdopodobieństwa

• $\vec{\nabla}_{\theta} \log p_{\theta}(\vec{x}) = \dots = \frac{1}{\sigma^2} (H^T \vec{x} - H^T H \vec{\theta}) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} H^T H \\ \sigma^2 \end{pmatrix}}_F \underbrace{((H^T H)^{-1} H^T \vec{x} - \vec{\theta})}_{\vec{\theta}(\vec{x})}$ - sprawdzić!
 (bo: $H^T H$ - odwracalne - sprawdzić!) ← $[H^T H \sim M_k^k \Rightarrow \det M_k \neq 0]$

2. Estymacja największej wiarygodności: (max-likelihood)

- mając zadane $p_{\theta}(x)$ i mierząc $x = x_0$ wybieramy taki estymator $\hat{\theta}_{ML}(x_0)$, że $p_{\hat{\theta}}(x_0)$ - maksymalne \equiv procedura heurystyczna!



• $p_{\theta}(x_0)$ - funkcja wiarygodności (jako funkcja θ)

• UWAGA: zazwyczaj szukamy maksimum $\log p_{\theta}(x_0)$ (z monotoniczności funkcji logarytm!) ← (odkrytyzm)

• przykład: $x_i \sim N(\theta, \sigma^2) \Rightarrow \log p_{\theta}(x) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \theta)^2 + \text{const.}$

$\frac{d}{d\theta} \log p_{\theta}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{ML}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
 (maksimum, bo biorąc pochodną mamy inf. Fishera) ← (dodatnia)

• FAKT: Jeśli istnieje estymator efektywny (wysycający nierówność C-R), to znajdziemy go przy pomocy metody największej wiarygodności.

• $\frac{d}{d\theta} \log p_{\theta}(x) = \lambda(\theta)(\tilde{g}(x) - \theta) \xrightarrow{ML} \hat{\theta}_{ML} = \tilde{g}(x)$ ← (wynik ścisły!)

• UWAGA: Naturalne uogólnienie na przypadek wielu parametrów:

→ szukamy $\vec{\nabla} \log p_{\theta}(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{ML}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x})$ ← tylko maksimum lokalne!

2.2. Asymptotyzacja efektywności ML:

- ML wysycą nierówność C-R asymptotycznie, tzn. dla $(N \rightarrow \infty)$ niezależnych powtórzeń eksperymentu (nie zachodzi dla N -skórzona (?))

• Twierdzenie: $x^{(N)} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$, $p_{\theta}^{(N)} = p_{\theta}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{\theta}(x_N)$ - założenia

→ wtedy: w granicy $N \rightarrow \infty$: $\hat{\theta}_{ML} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} N(\theta, \frac{1}{F^{(N)}})$, gdzie: $F^{(N)} = N \cdot F$

• dowód.

* Lemat: niech $p_1(x), p_2(x)$ - rozkłady prawdopodobieństwa. Wtedy:

- entropia względna: $D(p_1 \| p_2) := \int dx p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \geq 0$

• dowód: $\log t$ - funkcja wklęsła $\Rightarrow \log(\sum_i w_i t_i) \geq \sum_i w_i \log t_i$ ($w_i \geq 0, \sum_i w_i = 1$)

→ niech: $t_i = \frac{p_2(x_i)}{p_1(x_i)}$ oraz $w_i = p_1(x_i)$, więc wtedy mamy:

$\log(\sum_i p_2(x_i)) \geq \sum_i p_1(x_i) \log \frac{p_2(x_i)}{p_1(x_i)} \Rightarrow \log(1) \geq \int dx p_1(x) \log \frac{p_2(x)}{p_1(x)}$, zatem:

$\int dx p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \geq 0$ (gdzie „zamieniliśmy” sumę na całkę) □.

• Asymptotyczna efektywność ML - dowód, ciąg dalszy:

$$\tilde{\vartheta}_{ML}(x^{(N)}) = \arg_{\vartheta} \max(p_{\vartheta}^{(N)}(x^{(N)})) \xrightarrow{\text{niezmienniczość}} \tilde{\vartheta}_{ML}(x^{(N)}) = \arg_{\vartheta} \max(\log p_{\vartheta}^{(N)}(x^{(N)}))$$

- zakładamy, że 1-sza i 2-ga pochodna $\log p_{\vartheta}(x)$ - istnieje

- dodatkowo zakładamy, że: $\langle \frac{d}{d\vartheta} \log p_{\vartheta}(x) \rangle = \int dx \frac{d}{d\vartheta} p_{\vartheta}(x) = 0$

* Lemat: asymptotyczna nieobciążoność: $\langle \tilde{\vartheta}_{ML} \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \vartheta_0$

• dowód: $\frac{1}{N} \log p_{\vartheta}^{(N)}(x^{(N)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log p_{\vartheta}(x_i) \xrightarrow[\text{prawo wielkich liczb}]{N \rightarrow \infty} \int dx p_{\vartheta_0}(x) \log p_{\vartheta}(x) \leq \int dx p_{\vartheta_0}(x) \log p_{\vartheta_0}(x)$, zatem: $\arg_{\vartheta} \max \log p_{\vartheta}^{(N)}(x^{(N)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \vartheta_0$ - maksimum globalne (lemat 1) □.

* Lemat: asymptotyczna efektywność: $\Delta^2 \tilde{\vartheta}_{ML} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{F(N)}$

• dowód: $\frac{d \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\tilde{\vartheta}} - \frac{d \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = (\tilde{\vartheta} - \vartheta_0) \frac{d^2 \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\bar{\vartheta}}$

(z twierdzenia o wartości średniej, dla $\vartheta_0 < \bar{\vartheta} < \tilde{\vartheta}$)

- jeżeli $\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}_{ML}$, to: $\frac{d \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{d^2 \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\bar{\vartheta}} (\vartheta_0 - \tilde{\vartheta}_{ML})$ - maksimum globalne ($\Delta \Delta$)

- dla $N \rightarrow \infty$ mamy $\tilde{\vartheta}_{ML} \rightarrow \vartheta_0 \Rightarrow$ zatem także: $\bar{\vartheta} \rightarrow \vartheta_0$, więc:

(*) $\frac{d^2 \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\bar{\vartheta}} = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d^2 \log p_{\vartheta}(x_i)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\bar{\vartheta}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d^2 \log p_{\vartheta}(x_i)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \xrightarrow{N \rightarrow \infty}$

$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} N \cdot \int dx p_{\vartheta_0}(x) \frac{d^2 \log p_{\vartheta}(x)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = -NF(\vartheta_0) = -F^{(N)}(\vartheta_0)$

(**) $\frac{d \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \sqrt{N} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{d \log p_{\vartheta}(x_i)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \right)$, zaś kolejne „momenty” wynoszą:

$\langle \xi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \int dx_i p_{\vartheta_0}(x_i) \frac{d \log p_{\vartheta}(x_i)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$

$\langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \frac{d \log p_{\vartheta}(x_i)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \right)^2 \right\rangle \xrightarrow{\text{niezależność}} \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \left(\frac{d \log p_{\vartheta}(x_i)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \right)^2 \right\rangle =$

$= \int dx p_{\vartheta_0}(x) \left(\frac{d \log p_{\vartheta}(x)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \right)^2 \equiv F(\vartheta_0)$

\rightarrow z CENTRALNEGO TWIERDZENIA GRAVICZNEGO mamy: $\xi \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0, F(\vartheta_0))$

\rightarrow korzystając z ($\Delta \Delta$) otrzymujemy:

$\tilde{\vartheta}_{ML} - \vartheta_0 = - \frac{\frac{d \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0}}{\frac{d^2 \log p_{\vartheta}^{(N)}(x)}{d\vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\bar{\vartheta}}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N} \cdot N(0, F(\vartheta_0))}{N \cdot F(\vartheta_0)} = \frac{N(0, F(\vartheta_0))}{\sqrt{N} F(\vartheta_0)} \equiv N(0, \frac{F(\vartheta_0)}{NF(\vartheta_0)^2}) = N(0, \frac{1}{F^{(N)}})$. □.

3. Podjęcie Bayesowskie:

- dotychczas: $p_{\vartheta}(x)$ - rozkład prawdopodobieństwa

- teraz: $p(x|\vartheta)$

zmienna losowa o rozkładzie $p(\vartheta)$ - rozkład „a priori”
(znany rozkład parametru ϑ)

3.1. Optymalny estymator Bayesowski:

- dotychczas: $\Delta^2 \tilde{\vartheta} = \int dx p_{\vartheta}(x) (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 \Rightarrow$ (min $\Delta^2 \tilde{\vartheta}$ + warunek nieobciążoności)

- teraz: $\Delta^2 \tilde{\vartheta} = \int d\vartheta p(\vartheta) \int dx (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 p(x|\vartheta) = \int dx d\vartheta (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 p(x, \vartheta)$

• optymalny estymator: takie $\tilde{\vartheta}(x)$, że $\Delta^2 \tilde{\vartheta}$ - minimalne!

→ wzór Bayesa: $\{ p(x, \vartheta) = p(x|\vartheta)p(\vartheta) = p(\vartheta|x)p(x) \}$ prawdopodobieństwo łączne

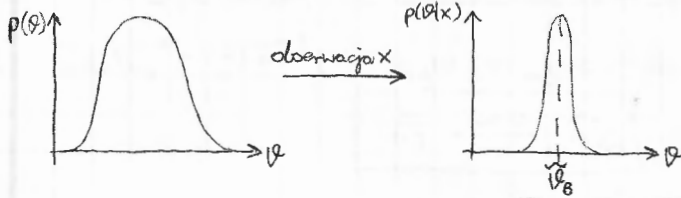
• $\Delta^2 \tilde{\vartheta} = \int \int d\vartheta (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 p(\vartheta|x) p(x) dx$ i z dodatniości rozkładu $p(x)$

- optymalny $\tilde{\vartheta}(x)$ taki, że minimalizuje: $\int d\vartheta (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 p(\vartheta|x)$, więc:

$$\frac{d}{d\tilde{\vartheta}} \int d\vartheta (\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta)^2 p(\vartheta|x) = 0 \Rightarrow \int d\vartheta 2(\tilde{\vartheta}(x) - \vartheta) p(\vartheta|x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\vartheta}(x) \underbrace{\int d\vartheta p(\vartheta|x)}_{=1} = \int d\vartheta \vartheta p(\vartheta|x) \Rightarrow \boxed{\tilde{\vartheta}(x) = \int d\vartheta \vartheta p(\vartheta|x)}$$

• $p(\vartheta|x)$ - rozkład prawdopodobieństwa „a posteriori” $\Rightarrow \boxed{\tilde{\vartheta}_B(x) = \langle \vartheta \rangle_{p(\vartheta|x)}}$



* Twierdzenie Bayesa: $p(\vartheta|x) = \frac{p(x|\vartheta)p(\vartheta)}{p(x)} \equiv \frac{p(\vartheta(x))p(\vartheta)}{\int d\vartheta p(x|\vartheta)p(\vartheta)}$, gdzie: $p(x|\vartheta) \equiv p_{\vartheta}(x)$ (zmiarzenie)

$$\boxed{\Delta^2 \tilde{\vartheta}_B} = \int dx \int d\vartheta (\langle \vartheta \rangle_{p(\vartheta|x)} - \vartheta)^2 p(\vartheta|x) p(x) = \boxed{\int dx p(x) \Delta^2 \vartheta |_{p(\vartheta|x)}}$$

→ w ogólności $\Delta^2 \tilde{\vartheta}_B$ będzie zależęć od $p(\vartheta)$!!!

→ ale jeśli $p(\vartheta)$ jest wolnozmiennie w porównaniu z $p(x|\vartheta)$, to:

$$p(\vartheta|x) = \frac{p(x|\vartheta)p(\vartheta)}{p(x)} \sim p(x|\vartheta), \text{ zatem: } \Delta^2 \tilde{\vartheta}_B \text{ nie będzie praktycznie zależęć od } p(\vartheta)$$

3.2. Modele gaussowskie: $X_i \sim N(\vartheta, \sigma^2)$, czyli: $p(x|\vartheta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \vartheta)^2}$

→ zakładamy rozkład „a priori”: $p(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} (\vartheta - \mu_0)^2}$

→ wtedy otrzymujemy rozkład „a posteriori” (zadania domowe!):

$$\bullet p(\vartheta|x) = \frac{p(x|\vartheta)p(\vartheta)}{p(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\vartheta|x}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_{\vartheta|x}^2} (\vartheta - \mu_{\vartheta|x})^2}, \text{ gdzie:}$$

$$\sigma_{\vartheta|x}^2 = \frac{1}{\left(\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)}, \quad \mu_{\vartheta|x} = \left(\frac{N}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) \sigma_{\vartheta|x}^2, \text{ gdzie: } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

KWANTOWA ESTYMACJA - 30.11.2012 - WYKŁAD

4. Testowanie hipotez:

4.1. Optymalne Bayesowskie testowanie hipotez:

X - zmienna losowa (obserwowane zdania)

• Czy dane pochodzą z $p(x|H_0), p(x|H_1), \dots$? , H_i - hipotezy

→ obserwujemy $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ i do której H_i dane pasują najlepiej?

→ wiemy, że hipoteza H_i występuje z prawdopodobieństwem $p(H_i)$.

• Funkcja decyzji: $x \in X = \bigcup_i X_i$ oraz $X_i \cap X_j = \emptyset$

$h(x) = i$, dla $x \in X_i$

- niech C_{ij} będzie kosztem wybrania hipotezy H_i , jeśli prawdziwa jest H_j

(np. $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ - płacimy w przypadku pomyłki)

- Średni koszt dla danej funkcji kosztu h :

$C_h = \sum_j p(H_j) \cdot \int dx p(x|H_j) \cdot C_{h(x),j}$ ← dla jakiego h mamy C_h - najmniejsze?

$C_h = \sum_j \int dx C_{h(x),j} \frac{p(x|H_j)p(H_j)}{p(H_j|x) \cdot p(x)} = \int dx \left[\sum_j C_{h(x),j} p(H_j|x) \right] p(x)$ (*)

• optymalne h : $h_B(x) = \text{argmin}_i \left(\sum_j C_{i,j} p(H_j|x) \right)$; $p(H_j|x) = \frac{p(x|H_j)p(H_j)}{\sum_j p(x|H_j)p(H_j)}$

• PRZYKŁAD: $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ minimum error (ME)

$h_{ME}(x) = \text{argmin}_i \left(\left[\sum_j p(H_j|x) \right] - p(H_i|x) \right) = \text{argmax}_i p(H_i|x)$

→ wybieramy hipotezę, która maksymalizuje wartość prawdopodobieństwa „a posteriori”

$C_{ME} = \int dx \min_i (1 - p(H_i|x)) p(x) = 1 - \int dx \max_i [p(H_i|x)] p(x)$ (**)

→ jeśli dodatkowo $p(H_i) = \frac{1}{M}$, gdzie: $i = 1, \dots, M$, to otrzymujemy:

• $\text{argmax}_i p(H_i|x) = \text{argmax}_i \frac{p(x|H_i)p(H_i)}{p(x)} = \text{argmax}_i \frac{p(x|H_i) \cdot \frac{1}{M}}{p(x)} =$

$= \left\{ \text{argmax}_i p(x|H_i) = h_{ML}(i) \right\}$ MAX-LIKELIHOOD

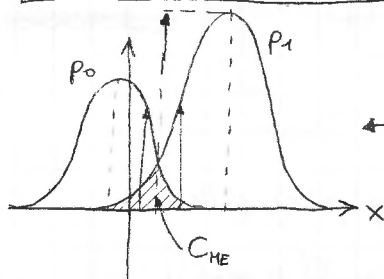
→ zakładamy: $M=2$ - dwie hipotezy, $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, $p(H_0)$, $p(H_1)$

$\begin{cases} h_{ME}(x) = 0, & \text{jeśli: } p(H_0|x) \geq p(H_1|x) \\ h_{ME}(x) = 1, & \text{jeśli: } p(H_0|x) < p(H_1|x) \end{cases}$

$C_{ME} = 1 - \int dx \max [p(x|H_0)p(H_0), p(x|H_1)p(H_1)] =$
 $= 1 - \frac{1}{2} \left[\int dx |p(x|H_0)p(H_0) - p(x|H_1)p(H_1)| + \int dx p(x|H_0)p(H_0) + \int dx p(x|H_1)p(H_1) \right] =$
 $= 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \int dx \frac{|p(x|H_0)p(H_0) - p(x|H_1)p(H_1)|}{p_0} \right)$, zatem:

$C_{ME} = \frac{1}{2} (1 - \|p_0 - p_1\|)$

, gdzie: $\|p - q\| = \int dx |p(x) - q(x)|$
 (odległość rozkładów prawdopodobieństwa)



← przecięcie się rozkładów „a priori”
 decyduje o średnim koszcie C_{ME}

4.2. Testowanie hipotez w granicy bardzo wielu realizacji:

- dwie hipotezy H_0, H_1 z prawdopodobieństwami „a priori” $p(H_0), p(H_1)$

$X \sim p(x|H_0) \equiv p_0(x)$ albo $X \sim p(x|H_1) \equiv p_1(x)$, N -niezależnych realizacji $\vec{x} = [x_1, \dots, x_N]$

$\vec{x} \sim \prod_{i=1}^N p_0(x_i)$ albo $\vec{x} \sim \prod_{i=1}^N p_1(x_i)$ i zakładając: $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$:

- wybierzemy H_0 , jeśli: $p(H_0) \cdot \prod_{i=1}^N p_0(x_i) \geq p(H_1) \cdot \prod_{i=1}^N p_1(x_i)$

- znalezienie C_N - w ogólności trudny problem numeryczny!

• Large deviation theory: $X \sim p$, $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \{a_1, \dots, a_{|\mathcal{X}|}\}$, N -realizacji (niezależnych!)

- empiryczny rozkład prawdopodobieństwa (częstość)

$$q_{\vec{x}}(a) = \frac{N(a|\vec{x})}{N} \quad (\text{np. seansa wystąpienia } a = \text{4 rozsek w } N=10 \text{ nutach})$$

→ jakie jest prawdopodobieństwo, że obserwowujemy dany rozkład empiryczny?

→ jakie jest prawdopodobieństwo, że obserwowujemy konkretny ciąg \vec{x} ?

$$\begin{aligned} p(\vec{x}) &= \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_a p(a)^{N \cdot q_{\vec{x}}(a)} = 2^{\sum_a (\log_2 p(a) \cdot N q_{\vec{x}}(a) + N q_{\vec{x}}(a) \log_2 q_{\vec{x}}(a) - N q_{\vec{x}}(a) \log_2 q_{\vec{x}}(a))} = \\ &= 2^{N(\sum_a q_{\vec{x}}(a) \log_2 q_{\vec{x}}(a) + \sum_a q_{\vec{x}}(a) \log_2 \frac{p(a)}{q_{\vec{x}}(a)})} = 2^{-N(H(q_{\vec{x}}) + D(q_{\vec{x}} \| p))}, \text{ gdzie:} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} H(q) &= -\sum_a q(a) \log_2 q(a) && \text{- entropia Shannona} \\ D(q \| p) &= \sum_a q(a) \log_2 \frac{q(a)}{p(a)} && \text{- entropia względna} \end{aligned} \right.$$

→ Ile jest ciągów o tym samym empirycznym q ?

$$N_q^{(N)} = \frac{N!}{\prod_a (q(a)N)!}$$

- prawdopodobieństwo otrzymania rozkładu q (w N -realizacjach): (dla rozkładu $X \sim p$)

$$p^{(N)}(q) = N_q^{(N)} \cdot 2^{-N[H(q) + D(q \| p)]}$$

$$\begin{aligned} \log_2 N_q^{(N)} &= \log_2 N! - \sum_a \log_2 ((q(a)N)!) \stackrel{(\text{przybliżenie Stirlinga})}{=} \{ \log_2 N! = N \log_2 N - N \log_e 2 + \mathcal{O}(\log_2 N) \} = \\ &= N \log_2 N - N \log_e 2 - (\sum_a [q(a)N \cdot \log(q(a)N) - q(a)N \ln 2]) + \mathcal{O}(\log N) = \\ &= N \log_2 N - N \sum_a q(a) \log_2 q(a) - \sum_a q(a)N \log_2 N + \mathcal{O}(\log_2 N) = NH(q) + \mathcal{O}(\log N) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{zatem: } \frac{1}{N} \log_2 N_q^{(N)} = H(q) + \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{N}\right) \Rightarrow N_q^{(N)} \doteq 2^{NH(q)} \quad \text{rowność z dokładnością do czynnika mierzącego}$$

$$p^{(N)}(q) \doteq 2^{-ND(q \| p)} \quad \text{TWIERDZENIE SANOVA}$$

→ dla dużych N : $q \rightarrow p$, a jeżeli $q \neq p$, to $p^{(N)}(q) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ (wykładniczo!)

• OGRANICZENIE CHERNOFF'A:

H_0, H_1 - hipotezy dla których otrzymujemy rozkłady $p_0(x), p_1(x)$

$$C_N \doteq 2^{-NC(p_0, p_1)}, \text{ gdzie: } C(p_0, p_1) \text{ - informacja Chernoff'a:}$$

$$C(p_0, p_1) = -\log_2 \left[\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \int dx p_0(x)^\lambda p_1(x)^{1-\lambda} \right] \leftarrow \text{nie ma znaczenia, jakie są rozkłady } p(H_0) > 0 \text{ oraz } p(H_1) > 0$$

III). Kwantowa teoria estymacji:

- zastępujemy: $p_{\psi}(x) \rightarrow \mathcal{S}_{\psi}$ - rodzina stanów kwantowych zależnych od parametru ψ
- żeby estymować, musimy zmierzyć:

• $\mathcal{S}_{\psi} \xrightarrow{\{\Pi_x\}} p_{\psi}(x) = \text{Tr}(\mathcal{S}_{\psi} \Pi_x)$, gdzie: $\sum_x \Pi_x = \hat{1}$, $\Pi_x \geq 0$ (POVM)

- teraz już klasycznie: $\psi \xrightarrow{p_{\psi}(x)} x \rightarrow \tilde{\psi}(x)$

- „dwa razy trudniej”: trzeba myśleć o $\tilde{\psi}(x)$ oraz o Π_x - wybór pomiaru

* KWANTOWA TEORIA ESTYMACJI = KLASYCZNA TEORIA ESTYMACJI + wybór kwantowego pomiaru

• przykład: $|\psi_{\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$, dostajemy N-kopii $|\psi_{\varphi}\rangle$: $\mathcal{S}_{\varphi} = |\psi_{\varphi}\rangle\langle\psi_{\varphi}|^{\otimes N}$

→ jaki pomiar i estymator najlepszy, żeby estymować φ ?

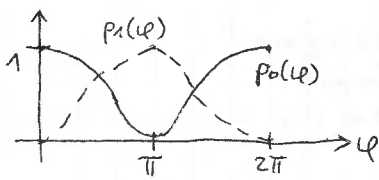
→ chwilało zakładamy dla uproszczenia $N=1$:

a) $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$, $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$ (wtedy $x=0,1$)

$p_{\varphi}(0) = \langle\psi_{\varphi}|\Pi_0|\psi_{\varphi}\rangle = \frac{1}{2}$, $p_{\varphi}(1) = \frac{1}{2}$ — nie zyskujemy informacji o φ

b) $\Pi_0 = |+\rangle\langle +|$, $\Pi_1 = |-\rangle\langle -|$, gdzie: $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$

$p_{\varphi}(0) = |\langle +|\psi_{\varphi}\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, $p_{\varphi}(1) = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$



- niegroźny problem: $\varphi \rightarrow 2\pi - \varphi$, to $p_{\varphi}(x)$ - identyczne (ale można to łatwo odróżnić, przesuwając, fazę pomiaru)

- zakładamy dalej, że: $\varphi \in [0, \pi]$

→ Jaka będzie precyzja estymacji φ , jeśli mamy N-kopii $|\psi_{\varphi}\rangle$, mierzonych każda w bazie $\{|+\rangle, |-\rangle\}$?

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $p_{\varphi}(x_i) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{x_i} \cos\varphi)$; $x_i = 0, 1$.

- obowiązuje nierówność C-R dla estymacji $\tilde{\varphi}(\vec{x})$: $\Delta\tilde{\varphi}^{(N)} \geq \frac{1}{\sqrt{F(N)}} = \frac{1}{\sqrt{F \cdot N}}$

$F = \frac{1}{p_{\varphi}(0)} \left(\frac{dp_{\varphi}(0)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{p_{\varphi}(1)} \left(\frac{dp_{\varphi}(1)}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2}{1+\cos\varphi} \left(\frac{1}{2}\sin\varphi\right)^2 + \frac{2}{1-\cos\varphi} \left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\right)^2 =$

$= \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{1+\cos\varphi} + \frac{1}{1-\cos\varphi}\right) = 1$ ← nie zależy od φ („stała wartość!”)

- zatem otrzymujemy: $\Delta\tilde{\varphi}^{(N)} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$

• PYTANIE: 1) Czy można asymptotycznie mieć precyzję lepszą niż $\frac{1}{\sqrt{N}}$, dzięki pomiarom kolektywnym $\Pi_x^{(N)}$?

2) Jaka jest optymalna strategia pomiaru dla skończonego N?

1) Kwantowe ograniczenie Cramera-Rao:

- chcemy mieć ograniczenie na $\Delta\tilde{\varphi}$ dla dowolnych $\tilde{\varphi}$ - nieobciążonych oraz dowolnych pomiarów Π_x , wykonywanych na stanie \mathcal{S}_{ψ} .

- wykonujemy pomiar: $p_{\psi}(x) = \text{Tr}(\mathcal{S}_{\psi} \Pi_x)$; wtedy informacja Fishera:

$F = \int dx \frac{1}{p_{\psi}(x)} \left(\frac{dp_{\psi}(x)}{d\psi}\right)^2 = \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\mathcal{S}_{\psi} \Pi_x)} \left(\frac{d}{d\psi} \text{Tr}(\mathcal{S}_{\psi} \Pi_x)\right)^2$
 $= \text{Tr}\left(\frac{d\mathcal{S}_{\psi}}{d\psi} \cdot \Pi_x\right)$ ← (liniowość operacji)

- oznaczenie: $\frac{d\rho_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(\Lambda\rho_{ij} + \rho_{ij}\Lambda)$, oraz miękki: $\rho_{ij} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| X_i |i\rangle$. Wtedy:

$$\left(\frac{d\rho_{ij}}{dt}\right)_{ij} = \frac{1}{2}((\Lambda\rho_{ij})_{ij} + (\rho_{ij}\Lambda)_{ij}) = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}p_j + p_i\Lambda_{ij}) \Rightarrow \Lambda_{ij}^{(0)} = \frac{2\left(\frac{d\rho_{ij}}{dt}\right)_{ij}}{(p_i + p_j)}$$

Symmetric logarithmic derivative (SLD)

$$F = \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{ij}\Pi_x)} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda\rho_{ij}\Pi_x + \rho_{ij}\Lambda\Pi_x) \right)^2 = (\rho_{ij}\Lambda\Pi_x)^\dagger, \text{ bo } \Lambda \text{ - hermitowska (patrz: elementy macierze)}$$

$$= \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{ij}\Pi_x)} (\text{Re Tr}(\Pi_x\Lambda\rho_{ij}))^2 \leq \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{ij}\Pi_x)} |\text{Tr}(\Pi_x\Lambda\rho_{ij})|^2$$

- zachodzi nierówność C-S: $|\text{Tr}(AB^\dagger)|^2 \leq \text{Tr}(A^\dagger A)\text{Tr}(B^\dagger B)$

- biorąc: $A = \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_{ij}}$, $B = \sqrt{\Pi_x} \Lambda \sqrt{\rho_{ij}}$, z cykliczności śladu otrzymujemy:

$$F \leq \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{ij}\Pi_x)} \cdot \text{Tr}(\sqrt{\rho_{ij}}\Pi_x\sqrt{\rho_{ij}}) \text{Tr}(\sqrt{\rho_{ij}}\Lambda\Pi_x\Lambda\sqrt{\rho_{ij}}) = \text{Tr}(\rho_{ij}\Lambda \underbrace{\int dx \Pi_x \Lambda}_{=\hat{1}}) = \underbrace{\text{Tr}(\rho_{ij}\Lambda^2)}_{F_Q}$$

- zatem: $F \leq F_Q$ KWANTOWA INFORMACJA FISHERA

• Kwantowa nierówność C-R: $\Delta\tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{F_Q}}$, $F_Q = \text{Tr}(\rho_{ij}\Lambda^2)$ KWANTOWA INFORMACJA FISHERA
(zależy tylko od stanów kwantowych, nie od pomiaru!)

1.1. Addytywność F_Q :

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^{(12)} = \rho_{ij}^{(1)} \otimes \rho_{ij}^{(2)} &\Rightarrow \frac{d\rho_{ij}^{(12)}}{dt} = \frac{d\rho_{ij}^{(1)}}{dt} \otimes \rho_{ij}^{(2)} + \rho_{ij}^{(1)} \otimes \frac{d\rho_{ij}^{(2)}}{dt} = \\ &= \frac{1}{2}(\Lambda^{(1)}\rho_{ij}^{(1)} + \rho_{ij}^{(1)}\Lambda^{(1)}) \otimes \rho_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2}\rho_{ij}^{(1)}(\Lambda^{(2)}\rho_{ij}^{(2)} + \rho_{ij}^{(2)}\Lambda^{(2)}) = \\ &= \frac{1}{2}(\Lambda^{(1)} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \Lambda^{(2)}) \rho_{ij}^{(1)} \otimes \rho_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2}\rho_{ij}^{(1)} \otimes \rho_{ij}^{(2)} (\Lambda^{(1)} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \Lambda^{(2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Q^{(12)} = \text{Tr}(\rho_{ij}^{(12)}\Lambda^{(12)2}) &= \text{Tr}(\rho_{ij}^{(1)} \otimes \rho_{ij}^{(2)} (\Lambda^{(1)} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \Lambda^{(2)})^2) = \\ &= \text{Tr}(\rho_{ij}^{(1)} \otimes \rho_{ij}^{(2)} (\Lambda^{(1)2} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \Lambda^{(2)2} + 2\Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)})) = \\ &= \text{Tr}(\rho_{ij}^{(1)}\Lambda^{(1)2}) + \text{Tr}(\rho_{ij}^{(2)}\Lambda^{(2)2}) + 2\text{Tr}(\rho_{ij}^{(1)} \otimes \rho_{ij}^{(2)} \Lambda^{(1)} \otimes \Lambda^{(2)}) = \\ &= \text{Tr}(\rho_{ij}^{(1)}\Lambda^{(1)2}) + \text{Tr}(\rho_{ij}^{(2)}\Lambda^{(2)2}) + 2\underbrace{\text{Tr}(\rho_{ij}^{(1)}\Lambda^{(1)})}_{=0} \underbrace{\text{Tr}(\rho_{ij}^{(2)}\Lambda^{(2)})}_{=0} = F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)} \end{aligned}$$

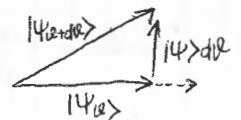
$$\text{(bo: } \frac{d\rho_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(\Lambda\rho_{ij} + \rho_{ij}\Lambda) \Rightarrow \text{Tr} \frac{d\rho_{ij}}{dt} = \text{Tr}(\Lambda\rho_{ij}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho_{ij}) = \text{Tr}(\Lambda\rho_{ij}) = 0)$$

$$\text{• jeśli } \rho_{ij}^{(N)} = \rho_{ij}^{\otimes N} \Rightarrow F_Q^{(N)} = N \cdot F_Q$$

1.2. Stany czyste: $\rho_{ij} = |\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|$

- wtedy: $\Lambda = 2(|\psi'_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}| + |\psi_{ij}\rangle\langle\psi'_{ij}|)$, gdzie: $|\psi'_{ij}\rangle = \frac{d}{dt}|\psi_{ij}\rangle$, zatem:

$$F_Q = (|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}| \Lambda^2) = \dots = 4(|\langle\psi'_{ij}|\psi_{ij}\rangle - |\langle\psi_{ij}|\psi'_{ij}\rangle|^2)$$



$$\text{• PRZYKŁAD: } |\psi_{ij}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) \Rightarrow |\psi'_{ij}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$F_Q = 4\left(\frac{1}{2} - \left|-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow \Delta\tilde{\varphi}^{(N)} \geq \frac{1}{\sqrt{NF_Q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ (optymalnie!)}$$

• PRZYKŁAD: $|\psi_t\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_0\rangle$ i chcemy estymować czas, mierząc $|\psi_t\rangle$

$$F_Q = 4\left(\frac{1}{\hbar^2}\langle\psi_0|\hat{H}^2|\psi_0\rangle - \frac{1}{\hbar^2}|\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle|^2\right) = \frac{4}{\hbar^2}\Delta^2\hat{H}, \text{ zatem:}$$

$$\Delta^2\tilde{t} \geq \frac{1}{F_Q} = \frac{\hbar^2}{4\Delta^2\hat{H}} \Rightarrow \Delta^2\tilde{t} \cdot \Delta^2\hat{H} \geq \frac{\hbar^2}{4} \text{ ZASADA NIEOZNACZONOŚCI}$$

(estymator czasu) (wariancja hamiltonianu)

1.3. Wyszycalność nierówności kwantowej C-R: (patrz: wyprowadzenie QC-R)

(*) $[\text{Re Tr}(\Pi_x \wedge \rho_\vartheta)]^2 = |\text{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_\vartheta)|^2$

(**) $|\text{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_\vartheta)|^2 = \text{Tr}((\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\vartheta})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\vartheta})) \cdot \text{Tr}((\sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_\vartheta})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_\vartheta}))$

(***)

(**) $\Rightarrow \boxed{\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\vartheta} = \lambda \sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_\vartheta}}$ i jeżeli dodatkowo $\lambda \in \mathbb{R}$, to otrzymujemy:

(*) $\Rightarrow \text{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_\vartheta) = \text{Tr}(\underbrace{\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\Pi_x}}_{= \frac{1}{\lambda} \sqrt{\Pi_x}} \underbrace{\sqrt{\rho_\vartheta} \sqrt{\rho_\vartheta}}_{= \rho_\vartheta(x)}) = \frac{1}{\lambda} \text{Tr}(\underbrace{\Pi_x \rho_\vartheta}_{= \rho_\vartheta(x)}) \in \mathbb{R}$

- więc wysycamy nierówność C-R, jeżeli znajdziemy Π_x takie, nie zachodzi (***)

- biorąc: $\boxed{\Pi_x = |x\rangle\langle x|}$, gdzie: $\{|x\rangle\}$ - baza własna operatora Λ , więc:

(***) $|x\rangle\langle x| \sqrt{\rho_\vartheta} = \frac{\lambda |x\rangle\langle x| \wedge \sqrt{\rho_\vartheta}}{\lambda \langle x|x\rangle \sqrt{\rho_\vartheta}}$, czyli musimy wybrać: $\boxed{\lambda_x = \frac{\lambda}{\langle x|x\rangle}}$
 (gdzie: $\Lambda = \sum_x \rho_x |x\rangle\langle x|$)

UWAGA: Λ - może zależeć od ϑ , więc pomiar wysycający może zależeć od ϑ .

• Nieparametrowa kwantowa nierówność C-R:

• $S_{\vec{\vartheta}}$, gdzie: $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_N)$, $\hat{C} \geq \hat{F}^{-1}$, gdzie: $F_{ij} = \int dx \frac{1}{p_{\vec{\vartheta}}(x)} \frac{\partial p_{\vec{\vartheta}}(x)}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial p_{\vec{\vartheta}}(x)}{\partial \vartheta_j}$

\rightarrow kwantowa nierówność Grama-Rao: $\boxed{C \geq F_Q^{-1}}$, gdzie:

$(F_Q)_{ij} = \text{Tr}(S_{\vec{\vartheta}} \cdot \frac{1}{2} (\Lambda_i \Lambda_j + \Lambda_j \Lambda_i))$, gdzie: $\frac{dS_{\vec{\vartheta}}}{d\vartheta_i} = \frac{1}{2} (\Lambda_i S_{\vec{\vartheta}} + S_{\vec{\vartheta}} \Lambda_i)$

nożne SLD - nie jest oczywista wysycalność, bo jeśli $[\Lambda_i, \Lambda_j] \neq 0$, to dla wielu parametrów $\vec{\vartheta}$ nie ma bazy, która jednocześnie diagonalizuje Λ_i oraz Λ_j .

2. Kwantowa estymacja Bayesowska: $p(\vartheta)$ - rozkład „a priori”
 - szukamy pomiaru $\{\Pi_x\}$ i estymatora $\tilde{\vartheta}(x)$ dla stanu S_ϑ

\rightarrow minimalizujemy średni koszt: $\boxed{\bar{C} = \int d\vartheta p(\vartheta) \int dx \frac{\text{Tr}(S_\vartheta \Pi_x)}{p_\vartheta(x)} C(\vartheta, \tilde{\vartheta}(x))}$

• np. $C(\vartheta, \tilde{\vartheta}(x)) = (\vartheta - \tilde{\vartheta}(x))^2$

- klasycznie: optymalny estymator $\tilde{\vartheta}(x) = \int d\vartheta \vartheta p(\vartheta|x)$ (dla powyższego kosztu)

- teraz jest trudniej, bo trzeba znaleźć optymalny pomiar!

• UPROSZCZENIE: skoro $\tilde{\vartheta}(x)$ - estymator (na podstawie wyniku x), to mamy:

$\{\Pi_x\} \rightarrow \{\Pi_{\vartheta'}\}$, gdzie: $\Pi_{\vartheta'} = \int dx \delta(\vartheta' - \tilde{\vartheta}(x)) \Pi_x$ ← indeksowanie pomiaru za pomocą estymatora

$\bar{C} = \int d\vartheta p(\vartheta) \int d\vartheta' \text{Tr}(S_\vartheta \Pi_{\vartheta'}) C(\vartheta, \vartheta') \equiv \int d\vartheta d\vartheta' p(\vartheta) \text{Tr}(S_\vartheta \Pi_{\vartheta'}) C(\vartheta, \vartheta')$

- sformułowanie matematyczne: $\min_{\{\Pi_{\tilde{g}}\}} \bar{C}, \Pi_{\tilde{g}} \geq 0, \int d\tilde{g} \Pi_{\tilde{g}} = \mathbb{1}$ w ogólności trudny problem!

2.1. Zagadnienia z symetrią: G - grupa (np. $U(1), SU(2)$)

- będziemy estymować elementy grupy $g \in G$

• U_g - reprezentacja unitarna grupy G ($U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$ - "składanie" grupowe)

- problem estymacji ma symetrię ze względu na grupę G , jeśli:

* a) $S_g = U_g S_e U_g^\dagger$ (np. $|\Psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) = \frac{e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{U_\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$)

* b) $C(g_1, g_2) = C(hg_1, hg_2)$ (np. $C(\varphi_1, \varphi_2) = C(\varphi_1 - \varphi_2)$)
(niezmienniczość grupowa)

* c) rozkład „a priori” ma być niezmienniczy względem działania grupy:
 $d_g p(g) = d(hg) p(hg)$ (np. $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow d\varphi p(\varphi) = d\varphi \frac{1}{2\pi} = \frac{d(\varphi + \varphi')}{2\pi}$)

→ zawsze istnieje miara taka, że spełniony jest postulat c):

$d\mu_g = d(g) p(g)$ - niezmiennicza } MIARA HAARA

• np. $p(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi$ - niezmiennicze względem obrotów (w grupie: $SU(2)/U(1)$)
 $d\mu_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{4\pi} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ - (niezmiennicza) miara Haara.

- teraz zakładamy: d_g - „domyślnie” miara Haara: $d(hg) \equiv d_g$

→ średni koszt (w problemach z symetrią): $\bar{C} = \int d_g d_{\tilde{g}} \text{Tr}(S_g \Pi_{\tilde{g}}) C(g, \tilde{g})$

2.2. Pomiaru kowariancyjne:

• definicja: $\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ - pomiar kowariancyjny $\Leftrightarrow \forall_{\tilde{g}, h} \Pi_{h\tilde{g}} = U_h \Pi_{\tilde{g}} U_h^\dagger$

- WNIOSK: $\Pi_{\tilde{g}} = U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^\dagger$, gdzie: e - el. neutralny: $e \cdot g = g$

(wystarczy zadać Π_e oraz znać $U_{\tilde{g}}$ - reprezentacja grupy)

* TWIERDZENIE: Jeśli problem estymacji ma symetrię ze względu na grupę G , to minimalny koszt da się uzyskać pomiarem kowariancyjnym grupy G .

• dowód: niech $\Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}}$ - pomiar optymalny (minimalizuje średni koszt), zatem:

$\bar{C}_{\text{min}} = \int d_g d_{\tilde{g}} \text{Tr}(S_g \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}}) C(g, \tilde{g})$

- definiujemy pomiar: $\Pi_{\tilde{g}}^{\text{cov}} = \int d_{g'} U_{g'}^\dagger \Pi_{g'\tilde{g}}^{\text{opt}} U_{g'}$ - nowy pomiar

• lemat: $\Pi_{\tilde{g}}^{\text{cov}}$ - kowariancyjny, czyli: $U_h \Pi_{\tilde{g}}^{\text{cov}} U_h^\dagger = \Pi_{h\tilde{g}}^{\text{cov}}$

Ⓣ: $\int d_{g'} U_{g'}^\dagger \Pi_{g'\tilde{g}}^{\text{opt}} U_{g'} = \int d_{g'} U_{hg'^{-1}}^\dagger \Pi_{g'h\tilde{g}}^{\text{opt}} (U_{hg'^{-1}})^\dagger \stackrel{g' \rightarrow g'h}{=} \int d_{g'} U_{g'}^\dagger \Pi_{g'h\tilde{g}}^{\text{opt}} (U_{g'^{-1}})^\dagger = \int d_{g'} U_{g'}^\dagger \Pi_{g'h\tilde{g}}^{\text{opt}} U_{g'} \equiv \Pi_{h\tilde{g}}^{\text{cov}}$ □

- ponadto pokażemy, że: $\bar{C}_{\text{cov}} = \bar{C}_{\text{min}}$ - minimalny koszt dla pomiaru $\Pi_{\tilde{g}}^{\text{cov}}$.

$$\begin{aligned} \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(S_g \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}}) C(g, \tilde{g}) &= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(S_g \int dg' U_g^{\dagger} \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}} U_{g'}) C(g, \tilde{g}) = \\ &= \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(U_g S_e U_g^{\dagger} \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}} U_{g'}) C(g, \tilde{g}) = \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(S_e U_g^{\dagger} \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}} U_g) C(g, \tilde{g}) = \\ &= \{ g \rightarrow g^{-1}g ; \tilde{g} \rightarrow g^{-1}\tilde{g} \} = \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(S_e U_g^{\dagger} \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}} U_g) \cdot \frac{C(g^{-1}g, g^{-1}\tilde{g})}{= C(g, \tilde{g})} = \\ &= \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(S_g \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}}) C(g, \tilde{g}) = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(S_g \Pi_{\tilde{g}}^{\text{opt}}) C(g, \tilde{g}) = \bar{C}_{\text{min}}. \quad \square \end{aligned}$$

→ problem się upraszcza, bo możemy ograniczyć się do pomiarów koncentrycznych:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(U_g S_e U_g^{\dagger} U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^{\dagger}) C_{\tilde{g}} = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(U_{g^{-1}\tilde{g}}^{\dagger} S_e U_{g^{-1}\tilde{g}} \Pi_e) C(g, \tilde{g}) = \\ &= \{ g \rightarrow \tilde{g}g \} = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(U_{\tilde{g}}^{\dagger} S_e U_{\tilde{g}} \Pi_e) C(\tilde{g}g, \tilde{g}) = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(S_g \Pi_e) C(g, \tilde{g}) \end{aligned}$$

ostatecznie otrzymujemy: $\bar{C} = \int dg \text{Tr}(S_g \Pi_e) C(g, e)$

formułowanie matematyczne: $\min_{\Pi_e} \bar{C}, \Pi_e \geq 0, \int dg U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^{\dagger} = \hat{1}$

„jeszcze ładniej”: $\bar{C} = \text{Tr}(\left[\int dg S_g C(g, e) \right] \Pi_e)$ szukamy średniego kosztu dla jednego pomiaru Π_e

2.3. Optymalna estymacja fazy qubitów na równiku sfery Blocha, mając N-kopii stanu:

$S_{\varphi}^{(N)} = |\Psi_{\varphi}\rangle\langle\Psi_{\varphi}|^{\otimes N}$, gdzie: $|\Psi_{\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$

$\rho(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ - aby mieć unormowaną miarę Haara, $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4 \sin^2(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2})$ (funkcja kosztu)

$|\Psi_{\varphi}\rangle = \frac{e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{U_{\varphi}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ - grupa $U(1)$

Średni koszt: $\bar{C} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \text{Tr}(|\Psi_{\varphi}\rangle\langle\Psi_{\varphi}|^{\otimes N} \cdot \Pi_0) \cdot 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \left[\left(\int d\varphi |\Psi_{\varphi}\rangle\langle\Psi_{\varphi}|^{\otimes N} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \Pi_0 \right]$

$|\Psi_{\varphi}\rangle^{\otimes N} = U_{\varphi}^{\otimes N} |\Psi_0\rangle^{\otimes N} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) \right]^{\otimes N}$

→ jeżeli $g \in SU(2)$: $U_g^{\otimes N} = \bigoplus_j U_g^{(j)}$ - suma N-spinów $s = \pm \frac{1}{2}$

wtedy: $\mathcal{H}^{\otimes N} = \bigoplus_j \mathcal{H}^{(j)}$, gdzie: $j_{\text{max}} = \frac{N}{2} \Rightarrow \mathcal{H}^{(\frac{N}{2})}$ - jedno, oraz $\dim \mathcal{H}^{(\frac{N}{2})} = N+1$ (dodawanie współrzędnych Clebsha-Gordana)

$|\frac{N}{2}, m\rangle = \sum_{\text{permutacje}} \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{m}}} |111\dots 1000\dots 0\rangle = |n\rangle_s$ - stan symetryczny

gdzie: $m = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(N-n) = -\frac{1}{2}N + n, n \in (0, \dots, N)$

→ chcemy rozłożyć $|\Psi_0\rangle^{\otimes N}$ w bazie symetrycznej:

$|\Psi_0\rangle^{\otimes N} = \sum_{n=0}^N c_n |n\rangle_s$ ← formalizm liczby obrotów

$|\Psi_0\rangle^{\otimes N} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right]^{\otimes N} = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^1 |i_1 \dots i_N\rangle$, i biorąc: $c_n = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sqrt{\binom{N}{n}}$, mamy:

$\Rightarrow |\Psi_{\varphi}\rangle^{\otimes N} = \sum_{n=0}^N c_n e^{in\varphi} |n\rangle_s$ ← „zchodzimy z 2^N -wymiarowej bazy do bazy o wymiarze $(N+1)$ ”

• Średni koszt: $\bar{C} = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \left[\Pi_0 \int d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \frac{1}{2^N} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n'}} e^{i(n-n')\varphi} |n \times n'\rangle \right] =$
 $= \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 - e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) \int =$
 $= \frac{1}{\pi \cdot 2^{N+1}} \text{Tr} \left[\Pi_0 \sum_{n,n'=0}^{N-1} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n'}} |n \times n'\rangle \int_0^{2\pi} d\varphi (2 - e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) e^{i(n-n')\varphi} \right] = \frac{1}{\pi \cdot 2^{N+1}} \cdot \text{Tr}(\Pi_0 \hat{A}) \cdot 2\pi$
 (MACIERZ)

→ macierz A: $A = \sum_{n=0}^{N-1} 2 \binom{N}{n} |n \times n\rangle - \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n+1}} (|n \times n+1\rangle + |n+1 \times n\rangle)$

- szukamy Π_0 takiego, aby minimalizować wyrażenie $\text{Tr}(\Pi_0 A)$
- szukamy $\Pi_0 \in \mathcal{H}_S^{\text{ON}}$ - podprzestrzeń symetryczna (bo $A \in \mathcal{H}_S^{\text{ON}}$ i własność śladu)

• $\Pi_0^{(S)} = \sum_{n,n'} a_{n,n'} |n \times n'\rangle$; ale mamy warunek: $\frac{1}{2\pi} \int d\varphi U_\varphi \Pi_0 U_\varphi^\dagger = \hat{1}$, zatem:

$\sum_{n,n'} \int d\varphi a_{n,n'} e^{i(n-n')\varphi} |n \times n'\rangle \cdot \frac{1}{2\pi} = \hat{1}_S \iff \sum_n a_{n,n} |n \times n\rangle = \hat{1}_S \iff a_{n,n} = 1.$

⇒ zatem: $A = \begin{bmatrix} + & & & \\ - & + & & \\ & + & + & \\ & & + & + \end{bmatrix}$, $\Pi_0^{(S)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, oraz $\Pi_0^{(S)} \geq 0$

- $\min_{\Pi_0} \text{Tr}(\Pi_0 A)$ ⇒ chcemy jak największe liczby obok diagonal w operatore $\Pi_0^{(S)}$,
 bo: $\text{Tr}(AB^T) = \sum_{ik} A_{ik} (B^T)_{ki} = \sum_{ik} A_{ik} B^*_{ik}$ - suma elementów!

→ największe liczby to: (*) = 1 (wtedy macierz „klatkami 2x2” dodatnio określona)

→ możemy wybrać: $\Pi_0 = |e\rangle\langle e| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & & \vdots \\ & & 1 & & 1 \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$, gdzie: $|e\rangle = \sum_{n=0}^N |n\rangle$

⇒ ostatecznie:

$\bar{C} = \frac{2\pi}{\pi \cdot 2^{N+1}} \left[\sum_{n=0}^N 2 \binom{N}{n} - 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n+1}} \right] = 2 - \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\binom{N}{n} \binom{N}{n+1}} = \bar{C}_{\text{opt}}$ *OPTIMALNY KOSZT BŁĘDU*

• dla $N \rightarrow \infty$ z nierówności C-R: $\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$

$\bar{C}_{\text{opt}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 - (2 - \frac{1}{N}) = \frac{1}{N}$, zaś: $\bar{C}_{\text{opt}} \approx \Delta^2 \varphi$, zatem mamy wyżycelność!

2.4. Optymalna estymacja całkowicie nieznanego stanu qubitu:

• $|\psi\rangle_{\varphi} = \cos \frac{\varphi}{2} |0\rangle + \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\varphi} |1\rangle$ - estymacja dwuparametrowa (ϑ, φ)

$|\psi_{\vartheta, \varphi}\rangle = \underbrace{e^{i\varphi \frac{\sigma_y}{2}}}_{U_{\vartheta, \varphi} \equiv U_{\psi}} e^{i\vartheta \frac{\sigma_x}{2}} |0\rangle \Rightarrow G = \text{SU}(2) / \text{U}(1)$

- miara Haara: $dg = \frac{1}{4\pi} d\vartheta d\varphi \sin \vartheta =: d\psi$ (miara dla stanów czystych)

- funkcja kosztu: $C(\psi, \tilde{\psi}) = 4(1 - |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|^2)$ (mierzniemicy ze względu na iloczyn skalarny, czyli na obroty)

- mamy $|\psi^{(N)}\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$ - N-kopi stanu

- chcemy zminimalizować koszt estymacji:

$\bar{C} = \int d\psi \text{Tr}(\Pi_e |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}) \cdot 4(1 - |\langle \psi | 0 \rangle|^2)$

• „Sformułowanie matematyczne”: $\left\{ \min_{\Pi_e} \bar{C}, \Pi_e \geq 0, \int d\psi U_\psi^{\otimes N} \Pi_e U_\psi^{\dagger \otimes N} = \mathbb{1} \right\} (*)$

$$\int d\psi \text{Tr}(\Pi_e | \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N}) = \int d\psi \text{Tr}(\Pi_e U_\psi^{\otimes N} | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N} U_\psi^{\dagger \otimes N}) = \int d\psi \text{Tr}(U_\psi^{\dagger \otimes N} \Pi_e U_\psi^{\otimes N} | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N}) =$$

$$= \text{Tr}(\int d\psi U_\psi^{\otimes N} \Pi_e U_\psi^{\dagger \otimes N} | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N}) = 1, \text{ zatem:}$$

• $\bar{C} = 4(1 - \frac{\int d\psi \text{Tr}(\Pi_e | \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N}) \cdot |\langle \psi | 0 \rangle|^2}{F \equiv \text{fidelity (wierność stanu)}})$, ale: $\boxed{\text{Tr}(A \otimes B \cdot C \otimes D) = \text{Tr}(AC) \cdot \text{Tr}(BD)}$

• $F = \int d\psi \text{Tr}(\Pi_e | \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N}) \text{Tr}(| 0 \rangle \langle 0 | \cdot | \psi \rangle \langle \psi |) = \int d\psi \text{Tr}(\Pi_e \otimes | 0 \rangle \langle 0 | \cdot | \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N} \otimes | \psi \rangle \langle \psi |) =$

$$= \text{Tr}(\Pi_e \otimes | 0 \rangle \langle 0 | \cdot \underbrace{\int d\psi | \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N+1}}_A)$$

• $A = \int d\psi U_\psi^{\otimes N+1} | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N+1} U_\psi^{\dagger \otimes N+1} = \int d\psi U_\psi^{(j=\frac{N+1}{2})} | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N+1} U_\psi^{\dagger (j=\frac{N+1}{2})}$, bo: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s^{\otimes N+1})$

- A jest operatorem niezmienniczym względem działania grupy U_ψ :

$$U_\psi^S A U_\psi^{S\dagger} = \int d\psi \underbrace{U_\psi^S U_\psi^S}_{U_\psi^S} \underbrace{U_\psi^S U_\psi^{\dagger S}}_{U_\psi^{\dagger S}} | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N+1} \underbrace{U_\psi^{\dagger S} U_\psi^S}_{U_\psi^{\dagger S}} U_\psi^S = A \quad (\text{z definicji})$$

→ lemat Schura:

$\forall \psi U_\psi A U_\psi^\dagger = A \Rightarrow A = \lambda \cdot \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N+1}}$ dla U_ψ - reprezentacja nieprzywiedlna

⇒ zatem: $\text{Tr}(A) = \lambda \cdot \underbrace{(N+2)}_{\dim \mathcal{H}_s^{\otimes N+1}}$, ale z poprzednich obliczeń:

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(\int d\psi | \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N+1}) = \int d\psi \text{Tr}(| \psi \rangle \langle \psi |^{\otimes N+1}) = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{N+2}}$$

• $F = \frac{1}{(N+2)} \text{Tr}(\Pi_e^{(s)} \otimes | 0 \rangle \langle 0 | \cdot \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N+1}})$ (maksymalne przebiecie dla $\Pi_e \equiv \Pi_e^{(s)}$)

- z warunku (*): $\int d\psi U_\psi^S \Pi_e^{(s)} U_\psi^{\dagger S} = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N}}$ i biorąc dwustronnie ślad:

$$N+1 = \int d\psi \text{Tr}(U_\psi^S \Pi_e^{(s)} U_\psi^{\dagger S}) = \int d\psi \text{Tr}(\Pi_e^{(s)}) \Rightarrow \text{zatem: } \boxed{\text{Tr}(\Pi_e^{(s)}) = N+1}$$

- wiemy, że: $\text{Tr}(\Pi_e^{(s)} \otimes | 0 \rangle \langle 0 | \cdot \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N+1}}) \leq N+1$ (bo: $\text{Tr}(A \cdot P) \leq \text{Tr}(A)$)

- biorąc $\boxed{\Pi_e = | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N} \cdot (N+1)}$ ⇒ $(N+1) \text{Tr}(\underbrace{| 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N} \otimes | 0 \rangle \langle 0 |}_{= | 0 \rangle \langle 0 |^{\otimes N+1}} \cdot \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_s^{\otimes N+1}}) = N+1$

→ ostatecznie otrzymujemy „Fidelity”:

$F = \left(\frac{N+1}{N+2} \right) \Rightarrow$ czyli: $\bar{C} = 4 \left(1 - \frac{N+1}{N+2} \right)$ (optymalny koszt pomiaru (dla pomiarów kolektyjnych))

3. Rozóżnienie stanów kwantowych:

- patrz: Informacja kwantowa 1/2
- notatki z wykładu na stronie internetowej!

4. Tomografia stanów kwantowych:

- eksperyment: przygotować stan $\hat{\rho}$ (do późniejszego wykorzystania)
- powtarzamy wiele razy, mienimy \rightarrow rekonstruujemy $\hat{\rho}$
- „nic” nie zakładamy o stanie $\hat{\rho}$
- pomiary wykonujemy na pojedynczym $\hat{\rho}$

- $\hat{\rho}$ - ogólna macierz M_d^d , $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, $\hat{\rho} \geq 0$
 pomiar $\{\Pi_x\}$: $\sum_x \Pi_x = \hat{1}$, $\Pi_x \geq 0 \Rightarrow p_{\hat{\rho}}(x) = \text{Tr}(\hat{\rho} \Pi_x)$
 powtarzamy N razy \Rightarrow uzyskujemy n_x - obserwacji wyniku x
- $\sum_x n_x = N \Rightarrow$ liczymy $f_x = \frac{n_x}{N}$ i jeśli N -dużo: $f_x \approx p_{\hat{\rho}}(x)$
 na podstawie f_x rekonstruujemy stan $\hat{\rho}$

4.1. Pomiary informacyjnie kompletne:

\rightarrow ogólnie $\hat{\rho}$ ma (d^2-1) - rzeczywistych parametrów ($M_d^d + \text{Tr} \hat{\rho} = 1$)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{d} \hat{1} + \sum_{k=1}^{d^2-1} c_k \hat{\sigma}_k, \quad \hat{\sigma}_k \text{ - baza ortonormalna bezśladowych macierzy hermitowskich, to znaczy: } \text{Tr}(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) = \delta_{ij}, \text{Tr}(\hat{\sigma}_i) = 0.$$

$$p_{\hat{\rho}}(x) = \text{Tr}(\hat{\rho} \Pi_x) \Rightarrow \begin{bmatrix} p_{\hat{\rho}}(1) \\ p_{\hat{\rho}}(2) \\ \vdots \\ p_{\hat{\rho}}(K) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{d^2-1} \end{bmatrix}, \quad \text{zatem potrzebujemy co najmniej } K = d^2 \text{ różnych wyników pomiarów } ((d^2-1) + \sum_i p_i = 1)$$

- zatem potrzebujemy co najmniej d^2 - liniowo niezależnych operatorów Π_x .

- definicja: IC POVM (informationally complete POVM)
 $\rightarrow d^2$ - liniowo niezależnych Π_x , $\sum_x \Pi_x = \hat{1}$, $\Pi_x \geq 0$

- uwaga: zawsze lepiej, żeby Π_x były rzędu 1, czyli: $\Pi_x = a_x |Y_x\rangle\langle Y_x|$
 (takie pomiary dostarczają nam najwięcej informacji)

- definicja: SIC POVM (symmetric informationally complete POVM)
 $\rightarrow d^2$ - liniowo niezależnych Π_x takich, że:

$$\begin{cases} \Pi_x = a |Y_x\rangle\langle Y_x| \\ \text{Tr}(\Pi_x \Pi_y) = b = \text{const.}, \text{ dla } x \neq y \end{cases}$$

- uwaga: $\dim V = d$, to mamy:

$$\sum_{x=1}^{d^2} \Pi_x = \hat{1} \Rightarrow \sum_{x=1}^{d^2} \text{Tr}(a |Y_x\rangle\langle Y_x|) = d \Rightarrow d^2 \cdot a = d \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{d}}$$

$$d = \text{Tr}(\sum_x \Pi_x \sum_y \Pi_y) = d^2 \cdot a^2 + d^2(d^2-1)b = 1 + d^2(d^2-1)b \Rightarrow \boxed{b = \frac{d-1}{d^2(d^2-1)} = \frac{1}{d^2(d+1)}}$$

$$\rightarrow \text{zatem: } a^2 |\langle Y_x | Y_y \rangle|^2 = \frac{1}{d^2(d+1)} \Rightarrow \boxed{|\langle Y_x | Y_y \rangle|^2 = \frac{1}{d+1}} \quad (\text{dla } x \neq y)$$

4.2. Bazy wzajemnie nieobciążone MUB: (mutually unbiased basis)

- jeżeli chcemy robić pomiary rzutowe von-Neumanna
- jeżeli będziemy mierzyć w bazie $|e_1\rangle, \dots, |e_d\rangle$, to uzyskamy $(d-1)$ - niezależnych prawdopodobieństw

- żeby mieć IC POVM, musimy wykonać $(d+1)$ - różnych pomiarów (na części stanów) von-Neumanna w różnych bazach (bo: $(d+1)(d-1) = d^2 - 1 = K$)

\rightarrow mamy $(d+1)$ - baz: $B^{(i)} = \{|e_1^{(i)}\rangle, \dots, |e_d^{(i)}\rangle\}$, $i = 1, \dots, d+1$.

- definicja: $(d+1)$ - baz $B^{(i)}$ nazywamy MUB, jeżeli: $\forall_{\substack{i \neq j \\ k \neq l}} |\langle e_k^{(i)} | e_l^{(j)} \rangle|^2 = \frac{1}{d}$

(np. pomiary $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ dla polaryzacji qubitów)

4.3. Rekonstrukcja maximum-likelihood:

$p(x) = \text{Tr}(\rho \Pi_x)$, $\rho = \frac{1}{d} \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{d^2-1} c_i \hat{\sigma}_i$, $\Pi_x: x=1, \dots, K$, $K \geq d^2$ (tomograficzna kompletność)

$\vec{p} = M \vec{c}$ (macierz $M_{d^2-1}^K$)

• mierzymy stan $\hat{\rho}$ N-razy, obserwujemy n_x ($\sum_x n_x = N$), $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_K \end{bmatrix}$

$p_{\vec{c}}(\vec{n}) = \binom{N}{n_1, \dots, n_K} \prod_x p_{\vec{c}}(x)^{n_x}$ - szukamy takiego \vec{c} , że: $p_{\vec{c}}(\vec{n})$ - maksymalna!

- przykład - odczytanie: qubit mierzymy 3-razy, po razie w bazach $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$, otrzymujemy 8-różnych zdarzeń $|\pm\rangle_x, |\pm\rangle_y, |\pm\rangle_z$

$\rho = \frac{1}{2} \mathbb{1} + c_x \hat{\sigma}_x + c_y \hat{\sigma}_y + c_z \hat{\sigma}_z$, i mierzymy w bazie: $\begin{cases} x: p(+x) = \frac{1}{2} + c_x, p(-x) = \frac{1}{2} - c_x \\ y: p(+y) = \frac{1}{2} + c_y, p(-y) = \frac{1}{2} - c_y \\ z: p(+z) = \frac{1}{2} + c_z, p(-z) = \frac{1}{2} - c_z \end{cases}$

- założymy, że zaobserwowaliśmy wyniki:

$|+x\rangle, |+y\rangle, |+z\rangle \Rightarrow \begin{cases} n_{+x} = n_{+y} = n_{+z} = 1 \\ n_{-x} = n_{-y} = n_{-z} = 0 \end{cases}$

- w kryterium max-likelihood szukamy: $\arg \max_{\vec{c}} \sum_x n_x \log p_{\vec{c}}(x)$, zatem:

- szukamy maksimum: $1 \cdot \log(\frac{1}{2} + c_x) + 1 \cdot \log(\frac{1}{2} + c_y) + 1 \cdot \log(\frac{1}{2} + c_z) \equiv \mathcal{L}(\vec{c})$

- widać, że: $-\frac{1}{2} \leq c_i \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$ maksimum dla $c_x = c_y = c_z = \frac{1}{2}$ (żeby mieć dodatnie prawdopodobieństwa)

\Rightarrow zatem: $\hat{\rho} = \frac{1}{2} \mathbb{1} + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$! nie jest $\rho \geq 0$

\Rightarrow maksymalizacja po \vec{c} musi być z więzami: $\rho \geq 0$ MAX-LIKELIHOOD

(dla qubitu proste: $(2c_x)^2 + (2c_y)^2 + (2c_z)^2 \leq 1$ - stan z kuli Blocha!)

* PROBLEM: $\mathcal{L}(\vec{c}) = \log p_{\vec{c}}(\vec{n}) = \sum_x n_x \log p_{\vec{c}}(x)$, $\hat{\rho} = \frac{1}{d} \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{d^2-1} c_i \hat{\sigma}_i \geq 0$

\rightarrow szukamy: $\arg \max_{\vec{c}, \rho \geq 0} \mathcal{L}(\vec{c})$ - jak rozwiązać problem numerycznie?

• Convex Optimization:

- maksimum funkcji wklęsłej na zbiorze wypukłym } \Rightarrow wtedy maksimum lokalne jest także maksimum globalnym
 - minimum funkcji wypukłej na zbiorze wypukłym }

\rightarrow „u nas”: $\mathcal{L}(\vec{c})$ - wklęsła funkcja \vec{c} (logarytm!)
 Warunek $\rho \geq 0$ - zbiór wypukły \leftarrow np. pakiet CVX dla Matlab

* Rozkład Cholesky'ego: $\rho = T^+ T$, gdzie: (patrz: K. Barnaszek, artykuły)

T - macierz zespolona dolnotrójkątna (na diagonalu rzeczywiste) $\equiv (d^2-1)$ -parametrowa rzeczywistych
 $[\text{Tr}(T^+ T) = 1 \text{ oraz } \frac{d(d+1)}{2} \cdot 2 = d]$

\rightarrow wtedy szukamy: $\arg \max_{T, \text{Tr}(T^+ T) = 1} \mathcal{L}(T)$, $p(x) = \text{Tr}(T^+ T \Pi_x)$

- zaleta: nie trzeba pilnować $\rho \geq 0$
 - wada: $p(x)$ nie są liniowymi funkcjami T

4.4. Niepewność rekonstrukcji:

- można partycjonować rekonstrukcję dla zaburzonych stanów (metoda Monte-Carlo), ale metoda jest bardzo czasochłonna

- wiemy, że w granicy $N \rightarrow \infty$ metoda max-likelihood zbiega do prawdziwego stanu i uzyskuje nierówność Cramera-Rao. (przykład estymacji (d^2-1) -parametrycznej)

• wieloparametrowa nierówność Cramera-Rao:

$$C_{\vec{\theta}} \geq F^{-1}, \quad C_{ij} = \langle C_i C_j \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_j \rangle, \quad F_{ij} = N \cdot \sum_{x=1}^K \frac{1}{p(x)} \frac{\partial p(x)}{\partial \theta_i} \frac{\partial p(x)}{\partial \theta_j}$$

- oszacowania błędów wynikają z równości w nierówności Cramera-Rao; ryzyko niedoszacowania błędów dla skończonych wartości N

• UWAGA: dla $N \ll \infty$ metoda max-likelihood ryzykowna, bo ma tendencję do zwracania stanów „czystszych” niż są w rzeczywistości
liczenie F zwiększa w parametryzacji $\mathcal{G} = TTT$ dla stanów czystszych (ogólnie: nie pełnego ładu) \equiv może być osobliwa (nieodwracalna)

KWANTOWA ESTYMACJA - 18.01.2013 - WIKTAD

4.5. Bayesowska rekonstrukcja:

- rozkład „a priori” macierzy gęstości $p(\mathcal{G})$

- $\{\Pi_x\}$ - pomiar dający wyniki $\vec{n} = (n_1, \dots, n_K)$, $\sum n_i = N$

- w wyniku pomiarów otrzymujemy rozkład: $p(\vec{n}|\mathcal{G})$

• rozkład „a posteriori”: $p(\mathcal{G}|\vec{n}) = \frac{p(\vec{n}|\mathcal{G})p(\mathcal{G})}{p(\vec{n})}$, $p(\vec{n}) = \int d\mathcal{G} p(\vec{n}|\mathcal{G})p(\mathcal{G})$

- podejmy zrekonstruowaną macierz jako: $\tilde{\mathcal{G}} = \int d\mathcal{G} \mathcal{G} p(\mathcal{G}|\vec{n})$

- w ogólności trudny problem numeryczny (problem wyboru miary Haara (PŁASKIEJ!) dla ogólnej d -wymiarowej macierzy gęstości); można stosować inne miary:

1) \rightarrow miara Buresa (pochodzi od kwantowej informacji Fishera)

2) \rightarrow miara Hilberta-Schmiatta (pochodzi od metryki: $d(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \text{Tr}[(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2)^\dagger (\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2)]$)

• metoda Bayesowska bardziej „ostrożna” niż metoda „max-likelihood”, zatem warto używać jednocześnie obu metod tomografii kwantowej!

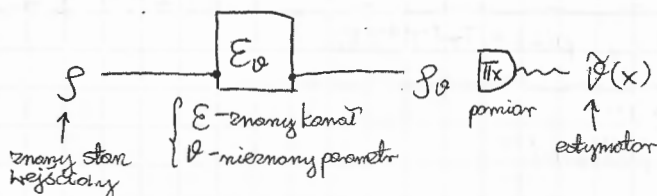
- ZALETY: „naturalne” słupki błędów (rozkład „a priori” $p(\mathcal{G})$ macierzy gęstości), czyli macierz kowariancji $C(\mathcal{G})$ macierzy gęstości

IV. Metrologia kwantowa:

- użycie stanów ściśniętych światła w interferometrze (ew. splątanych)

- stany splątane jonów w pułapkach jako wzorce zegarów atomowych \rightarrow D. Wineland

1. Estymacja parametrów kanału kwantowego:

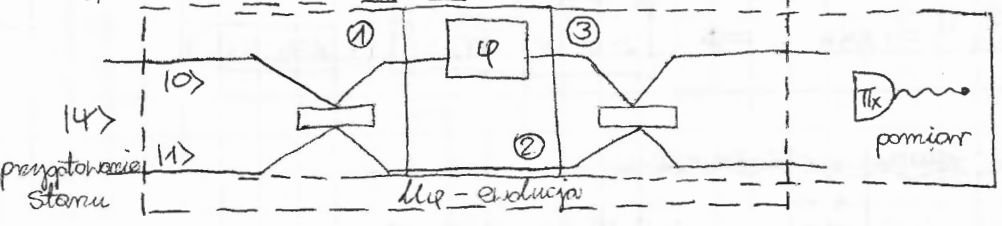


$$\rho_\theta = E_\theta(\rho) = \sum_i K_i^\theta \rho K_i^{\theta\dagger}$$

- rozważamy kanał postaci: $E_\varphi(\rho) = U_\varphi \rho U_\varphi^\dagger$, gdzie: $U_\varphi = e^{i\hat{H}\varphi}$, \hat{H} - hamiltonian

• **PROBLEM:** $\min_{\rho, \hat{\Pi}_x, \varphi} \Delta \tilde{\varphi}$ - zawsze możemy ograniczyć się do stanów czystych $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, więc szukamy $\min_{|\psi\rangle, \hat{\Pi}_x, \varphi} \Delta \tilde{\varphi}$

- przykład: Interferometr z 1 fotonem:



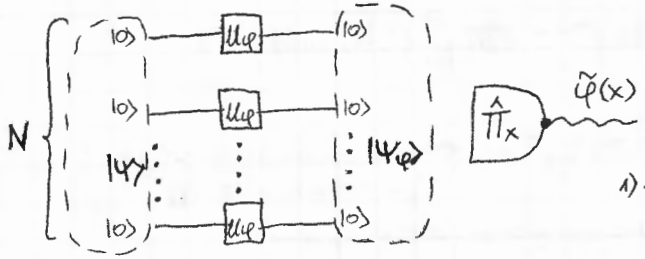
* $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ - początkowy stan
 - wygodniej myśleć: ① - przygotowanie, ② - ewolucja, ③ - pomiar

* $U_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - ewolucja w bazie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
 * $|\psi_\varphi\rangle = a e^{i\varphi} |0\rangle + b |1\rangle$

- intuicyjnie stan $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ będzie najlepszy do estymacji fazy φ

2. Estymacja parametru na N-równoległych kanałach:

- mamy N-układów próbujących (np. fotonów), które możemy przygotować w dowolnym stanie (również kolektywnym) i puszczamy je przez N-równoległe kanały kwantowe U_φ .



* $|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\otimes N} |\psi\rangle$ - ewolucja stanu

• $p(x|\varphi) = \text{Tr}(\Pi_x |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|)$

1) - jakie są optymalne $|\psi\rangle$ na wejściu?

2) - jaki zysk w precyzji (w funkcji N) możemy dostać dzięki użyciu stanów splecionych w porównaniu ze stanami „klasycznymi”: $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$?

2.1. Zastosowanie kwantowej informacji Fishera:

- wiemy, że mając rodzinę stanów $|\psi_\varphi\rangle$ nie da się estymować lepiej niż:

$\Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{F}}$ (kwantowa nierówność C-R), gdzie: $F = 4(\langle\psi'_\varphi|\psi'_\varphi\rangle - |\langle\psi'_\varphi|\psi_\varphi\rangle|^2)$

$\rightarrow |\psi_\varphi\rangle U_\varphi^{\otimes N} |\psi\rangle = (e^{i\hat{H}\varphi})^{\otimes N} |\psi\rangle = e^{i\sum_{k=1}^N \hat{H}^{(k)} \varphi} |\psi\rangle$, gdzie: $\hat{H}^{(k)} = \hat{1} \otimes \dots \otimes \hat{H} \otimes \dots \otimes \hat{1}$

$|\psi_\varphi\rangle = e^{i\hat{H}_N \varphi} |\psi\rangle$, gdzie: $\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N \hat{H}^{(k)}$ - kolektywny hamiltonian

$\rightarrow |\psi'_\varphi\rangle = i\hat{H}_N e^{i\hat{H}_N \varphi} |\psi\rangle$

$F = 4(\langle\psi|\hat{H}_N^2|\psi\rangle - |\langle\psi|\hat{H}_N|\psi\rangle|^2) = 4\Delta^2 \hat{H}_N \Rightarrow$ szukamy $\max_{|\psi\rangle} \Delta^2 \hat{H}_N$

• **FAKT:** Maksymalna wariancja obserwabli \hat{H} wynosi:

$\Delta^2 H^{(max)} = \frac{1}{4}(\lambda^{max} - \lambda^{min})^2$; $\lambda^{max}, \lambda^{min}$ - największa / najmniejsza wartość własna

\rightarrow stan, który daje taką maksymalną wariancję: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda^{max}\rangle + |\lambda^{min}\rangle)$

dla obserwabli H_N : $\begin{cases} \lambda_N^{\max} = N\lambda^{\max} \Rightarrow |\lambda_N^{\max}\rangle = |\lambda^{\max}\rangle^{\otimes N} \\ \lambda_N^{\min} = N\lambda^{\min} \Rightarrow |\lambda_N^{\min}\rangle = |\lambda^{\min}\rangle^{\otimes N} \end{cases}$

\Rightarrow zatem: $\max \Delta^2 H_N = \frac{N^2}{4} (\lambda^{\max} - \lambda^{\min})^2$ dla stanu: $|\psi^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda^{\max}\rangle^{\otimes N} + |\lambda^{\min}\rangle^{\otimes N})$

$\cdot F = 4N^2 \Delta^2 H = N^2 (\lambda^{\max} - \lambda^{\min})^2 \Rightarrow \Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{2N\Delta H}$ (KWANTOWO)

\rightarrow „klasyczenie”: $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$, gdzie: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda^{\max}\rangle + |\lambda^{\min}\rangle)$


$\Delta^2 H_N = \sum_{k=1}^N \Delta^2 H^{(k)} = N \Delta^2 H \Rightarrow \Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{2\sqrt{N}\Delta H}$ (KLASYCZNIE)

* PRZYKŁAD: N-fotonów w interferencji:

$U = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^{\max} = 1, \lambda^{\min} = 0$

$|\psi^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle) \Rightarrow \Delta^2 H = \frac{1}{4}$, zatem: $\Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{N}$ SKALOWANIE HEISENBERGA

- gdyby wzrósł fotonów nieskorelowane: $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N} \Rightarrow \Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$ sum średni

* INTUICJA: $|\psi_{\varphi}^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{iN\varphi} |00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle)$  ← N razy gęstsze próbki

\rightarrow myśląc o fotonach, wyprowadź przejść do cząstek nierozdzielalnych - formalizm liczby obszeri:

$|m, N-m\rangle \equiv n$ -fotonów w stanie $|0\rangle$
(N-n) fotonów w stanie $|1\rangle$

\rightarrow STAN OPTIMALNY: $|\psi^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, 0\rangle + |0, N\rangle)$ (stan NOON)

\rightarrow STAN KLASYCZNY OPTIMALNY: $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N} = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{m=0}^N \sqrt{\binom{N}{m}} |m, N-m\rangle$
(stan „modowo splątany”)

* UWAGA: patologia NOON'a: $|\psi_{\varphi+\frac{\pi}{N}}^{\text{opt}}\rangle \equiv |\psi_{\varphi}^{\text{opt}}\rangle \leftarrow$ (rozróżniemy serż tylko z dokładnością $\frac{\pi}{N}$)

* UWAGA: nierówność Cramera-Rao na pewno wygocana, ale przy wielu pomiarzeniach eksperymentu

$\Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{K} \cdot N}$ - wygocanie dla $k \rightarrow \infty$ ($\Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{K} \cdot N} = \frac{\sqrt{K}}{KN}$)
(liczba, wiarygodnych fotonów)

2.2. Podjęcie Bayesowskie:

- optymalne stany i pomiary dla estymacji serż, z brakiem wiedzy „a priori”: $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$
- rozważamy ogólny N-fotonowy stan w interferencji:

$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N c_n |n, N-n\rangle := \sum_{n=0}^N c_n |n\rangle \Rightarrow |\psi_{\varphi}\rangle = U_{\varphi}^{\text{sym}} |\psi\rangle = \sum_{n=0}^N c_n e^{in\varphi} |n\rangle$

- przyjmujemy funkcję kosztu postaci: $C(\tilde{\varphi}, \varphi) = 4 \sin^2(\frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2})$
- chcemy minimalizować średni koszt:

$\bar{C} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \langle \psi_{\varphi} | \Pi_{\tilde{\varphi}} | \psi_{\varphi} \rangle \cdot 4 \sin^2(\frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{2})$ - szukamy $\min_{|\psi\rangle, \Pi_{\tilde{\varphi}}}$

(indeksujemy $\Pi_{\tilde{\varphi}}$)

- wiemy, że optymalne pomiary są kowariancyjne: $\Pi_{\tilde{\varphi}} = U_{\varphi}^{\text{sym}} \Pi_0 U_{\varphi}^{\text{sym} \dagger}$

$\bar{C} = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \int d\tilde{\varphi} \langle \psi | U_{\varphi}^{\dagger} U_{\tilde{\varphi}} \Pi_0 U_{\tilde{\varphi}}^{\dagger} U_{\varphi} | \psi \rangle \cdot 4 \sin^2(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}) = 4 \langle \psi | \int d\varphi U_{\varphi}^{\dagger} \Pi_0 U_{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} | \psi \rangle$

- w podejściu Bayesowskim średni koszt: $\bar{C} = \langle \psi | \int d\varphi U_{\varphi}^{\dagger} \Pi_0 U_{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} | \psi \rangle$

• $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n, N-n\rangle \equiv \sum_n c_n |n\rangle$, $\Pi_0 = \sum_{n,m} a_{n,m} |n\rangle\langle m|$ - jaki jest optymalny?

- analiza identyczna jak poprzednio (wykład, str (22)) pokazuje, że zachodzi:

• $\Pi_0 = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} |e\rangle\langle e|$, gdzie: $|e\rangle = \sum_{n=0}^N |n\rangle$, zatem średni koszt:

• $\bar{C} = \frac{2}{\pi} \langle \psi | \int d\varphi U_{\varphi}^{\dagger} |e\rangle\langle e| U_{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \langle \psi | \int d\varphi \sum_{n,m} |n\rangle\langle m| e^{-in\varphi} e^{im\varphi} \left(1 - \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right) | \psi \rangle =$
 $= \langle \psi | \int d\varphi \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} | \psi \rangle$ - jaki stan $|\psi\rangle$ minimalizuje średni koszt?

→ szukamy wektora własnego A odpowiadającego najmniejszej wartości własnej λ_{\min} - można to zrobić analitycznie, otrzymując:

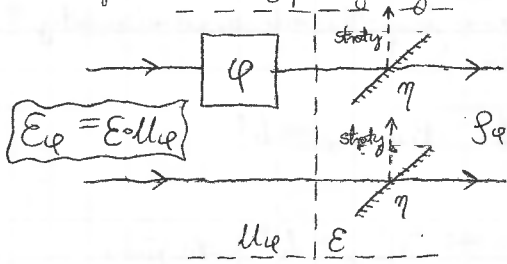
$\bar{C}^{opt} = 2\lambda_{\min} = 2(1 - \cos(\frac{\pi}{N+2}))$
 $|\psi^{opt}\rangle = \sum_n c_n |n, N-n\rangle$, gdzie: $c_n = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin\left[\frac{(n+1)\pi}{N+2}\right]$

→ jakie jest skalowanie C dla dwóch $N \rightarrow \infty$?

$\bar{C} \approx 2(1 - 1 + \frac{\pi^2}{2(N+2)^2}) = \frac{\pi^2}{(N+2)^2} \approx \frac{\pi^2}{N^2} \Rightarrow \Delta\tilde{\varphi} \approx \frac{\pi}{N}$ SKALOWANIE HEISENBERGA

3. Estymacja fazy w obecności strat:

- straty fotonów, straty atomów, itp.
- tym razem dysponujemy kanałem ze stratami



η - prawdopodobieństwo przejścia fotonu
 $(1-\eta)$ - prawdopodobieństwo strat

• szukamy optymalnych stanów na wejściu:

$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n, N-n\rangle$

• $U_{\varphi} |\psi\rangle = \sum_n c_n e^{in\varphi} |n, N-n\rangle$

• $\tilde{E}_{\varphi} |\psi\rangle = \tilde{E}(\sum_n c_n e^{in\varphi} |n, N-n\rangle) = \sum_n c_n e^{in\varphi} \sum_{l_0=0}^n \sum_{l_1=0}^{N-n-l_0} |n-l_0, N-n-l_1\rangle |l_0\rangle |l_1\rangle \sqrt{\binom{n}{l_0} \binom{N-n-l_0}{l_1} \eta^{l_0} (1-\eta)^{N-l_0-l_1}}$

→ interesuje nas macierz gęstości na wyjściu kanału kwantowego:

$\rho_{\varphi} = E(|\psi_{\varphi}\rangle) = \text{Tr}_{l_0, l_1}(\tilde{E}(|\psi\rangle)) \Rightarrow \rho_{\varphi} = \sum_{l_0=0}^N \sum_{l_1=0}^{N-l_0} |\psi_{\varphi}^{l_0, l_1}\rangle \langle \psi_{\varphi}^{l_0, l_1}|$, gdzie:

• $|\psi_{\varphi}^{l_0, l_1}\rangle = \sum_{n=l_0}^{N-l_0-l_1} c_n e^{in\varphi} |n-l_0, N-n-l_1\rangle \sqrt{B_{l_0}^n B_{l_1}^{N-n}}$, gdzie: $B_{l_i}^n = \binom{n}{l_i} \eta^{n-l_i} (1-\eta)^{l_i}$

- ostatecznie: $\rho_{\varphi} = \sum_{N'=0}^N \sum_{l_0=0}^{N-N'} |\psi_{\varphi}^{l_0, N-N'-l_0}\rangle \langle \psi_{\varphi}^{l_0, N-N'-l_0}| = \bigoplus_{N'=0}^N \sum_{l_0=0}^{N-N'} |\psi_{\varphi}^{l_0, N-N'-l_0}\rangle \langle \psi_{\varphi}^{l_0, N-N'-l_0}| \equiv \rho_{\varphi}^{(N')}$

(gdzie: $N' = N - l_0 - l_1$ - przyjęte oznaczenie)

⇒ szukamy optymalnych stanów na wejściu, aby $\Delta\tilde{\varphi}$ - minimalne!

3.1. Metoda Quantum Fisher Information: (QFI)

• $F(\rho_\varphi) = \text{Tr}(\rho_\varphi \Lambda^2)$, gdzie: $\frac{d\rho_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2}(\Lambda \rho_\varphi + \rho_\varphi \Lambda)$

- liczenie wymaga diagonalizacji $\rho_\varphi \rightarrow$ w ogólności trzeba szukać optymalnych stanów i $\Delta\tilde{\varphi}$ - numerycznie (np. dla $N < 100 \ll \infty$)
- problem: jak strześć zachowanie asymptotyczne $N \rightarrow \infty$? \rightarrow pytanie, czy zachodzi skalowanie $\Delta\tilde{\varphi} \sim \frac{1}{N}$ czy $\Delta\tilde{\varphi} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$, czy może $\Delta\tilde{\varphi} \sim \frac{1}{N^\alpha}$? (2009 r.)

3.2. Podejście Bayesowskie:

- estymacja Bayesowska $\tilde{\varphi}$ na stanie $\rho_\varphi = \bigoplus_{N'=0}^N \rho_\varphi^{(N')} = \bigoplus_{N'=0}^N U_\varphi^{(N')} \rho_0^{(N')} U_\varphi^{(N')\dagger}$

- występujemy problem kowariantry, zatem optymalny pomiar:

• $\Pi_{\tilde{\varphi}}^{(N)} = U_{\tilde{\varphi}} \Pi_0^{(N')} U_{\tilde{\varphi}}^\dagger$ - można pokazać, że także w obecności strat, optymalny pomiar:

• $\Pi_0^{(N')} = \frac{1}{2\pi} |e^{(N')} \rangle \langle e^{(N')}|$, gdzie: $|e^{(N')} \rangle = \sum_{n=0}^{N'} |n, N'-n \rangle$, zatem średni koszt:

• $\bar{C} = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$, gdzie: $A_{n,n-1} = A_{n-1,n} = - \sum_{l_0=0}^n \sum_{l_1=0}^{N-n} \sqrt{B_{l_0}^n B_{l_1}^{N-n}} \sqrt{B_{l_0}^{n-1} B_{l_1}^{N-n+1}}$

\rightarrow optymalny średni koszt: $\bar{C}^{\text{opt}} = 2\lambda^{\text{min}}$ - „nie da się analitycznie obliczyć λ^{min} i odpowiadającego jej wektora własnego!

\rightarrow chcemy przynajmniej uzyskać „ciekawe” / dobre ograniczenie:

• $\tilde{A} = 2\hat{A} - 2\hat{B}$, gdzie: $\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & |*| & & & \\ |*| & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ - szukamy maksymalnej wartości własnej \hat{B} : λ^{max}

- wystarczy znaleźć górne ograniczenie λ^{max} : $\lambda^{\text{max}} \leq \lambda^{\uparrow}_{\text{max}} \Rightarrow$ wtedy: $\bar{C} \geq 2 - 2\lambda^{\uparrow}_{\text{max}}$

- FAKT: wystarczy znaleźć $|*|^{\text{max}}$ i zastąpić nim wszystkie niezerowe elementy! (ta procedura na pewno nie obniży λ^{max})

- największa wartość $|*|^{\text{max}}$ odpowiada $n = \frac{N}{2}$: $B_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1} = b^{\uparrow}$

- wtedy otrzymujemy: $B^{\uparrow} = \begin{bmatrix} 0 & b^{\uparrow} & & & \\ b^{\uparrow} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^{\uparrow}_{\text{max}} = b^{\uparrow} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right)$ (analogicznie do przypadku bez strat)

\Rightarrow optymalny średni koszt:

$\bar{C}^{\text{opt}} \geq 2(1 - b^{\uparrow} \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right))$, gdzie: $b^{\uparrow} = \sum_{l_0=0}^{N/2} \sqrt{B_{l_0}^{N/2} B_{l_0}^{N/2-1}} \cdot \sum_{l_1=0}^{N/2} \sqrt{B_{l_1}^{N/2} B_{l_1}^{N/2+1}}$

- dla dużych $N \rightarrow \infty$: $b^{\uparrow} \approx 1 - \frac{1-\eta}{2\eta N}$, zatem średni koszt:

• $\bar{C}^{\text{opt}} \geq 2\left(1 - \left(1 - \frac{1-\eta}{2\eta N}\right) \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2\left[1 - \left(1 - \frac{1-\eta}{2\eta N}\right) \left(1 - \frac{\pi^2}{2(N+2)^2}\right)\right] =$
 $= 2\left[\frac{1-\eta}{2\eta N} + \frac{\pi^2}{2(N+2)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right] = \frac{1-\eta}{\eta N} + \frac{\pi^2}{(N+2)^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1-\eta}{\eta \cdot N} \approx \bar{C}^{\text{opt}}$

\Rightarrow zatem: $\Delta\tilde{\varphi} \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta \cdot N}}$ estymacja ze stratami

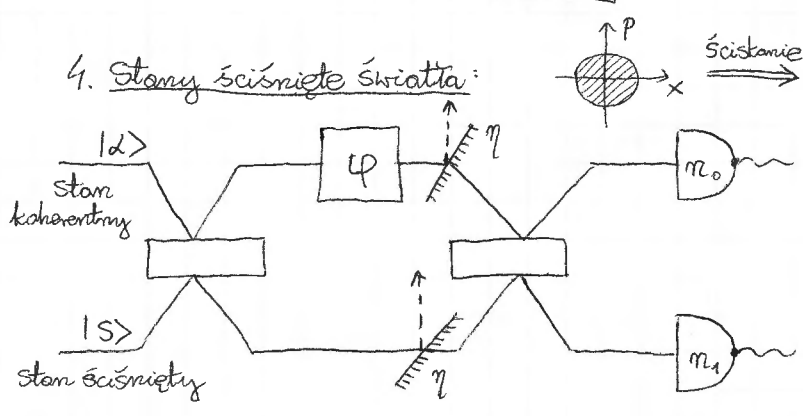
- zysk w porównaniu z wyciem niesplatanym („klasycznym” cząstek):

$\Delta\tilde{\varphi}^{\text{klas}} = \frac{1}{\sqrt{\eta N}} \Rightarrow$ „kwantowy zysk” $\Delta\bar{C}^{\text{opt}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}$ (duży zysk, jeżeli mamy małe straty!)

* UWAGA: dokładnie to samo ograniczenie można uzyskać, używając kwantowej informacji Fishera (patrz: artykuły R. Demkowicz & J. Kołodziejcki)

→ pytanie: czy $\Delta\tilde{\varphi} \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta N}}$ da się wyycić?

4. Stany ściśnięte światła:



* Użycie stanów ściśniętych zmniejsza fluktuacje w zliczeniach detektorów! (prace z lat 80.)

- dla silnych wiązek laserowych (duże \bar{n}):

$$\Delta^2 \tilde{\varphi} \approx \frac{1-\eta + \eta e^{-2s}}{\eta \cdot \bar{n}}$$

s - parametr ściśnięcia
 \bar{n} - średnia liczba użytych fotonów

- jeżeli weźmiemy stany „mocno ściśniętych” ($s \approx 10$), to otrzymamy:

$$\Delta\tilde{\varphi} \approx \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta \cdot \bar{n}}} \text{ optymalne skalowanie ze stratami.}$$