Powtórka wielomiany, NWD Dzielenie wielomianów. Zasadnicze twierdzenie algebry. Szukanie największego wspólnego dzielnika - algorytm Euklidesa. Ułamki proste zespolone, rzeczywiste.

Zadanie 1 Podzielić z resztą wielomian P przez wielomian Q

a) $P(z) = z^5 - 2iz^2 - z,\ Q(z) = z^2 + 1$

b) $P(z) = z^5,\ Q(z) = (z+1)(z-1)(z-2)$

odp: a) $P(z) = (z^3 - z - 2i)Q(z) + 2i$, b) $P(z) = (z^2 + 2z + 5)Q(z) + 10z^2 + z - 10$

Zadanie 2 Rozłożyć na czynniki pierwsze następujące wielomiany (nad $\mathbb{R}$ jak i nad $\mathbb{C}$)

a) $x^4 + 16$

b) $x^4 + 5x^2 + 6$

odp: a) nad $\mathbb{C}$: $(x - 2e^{i\pi/4})(x - 2e^{i3\pi/4})(x - e^{i5\pi/4})(x - e^{i7\pi/4})$, nad $\mathbb{R}$: $(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$ b) nad $\mathbb{C}$: $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$, nad $\mathbb{R}$: $(x^2 + 2)(x^2 + 3)$

Zadanie 3 Stosując algorytm Euklidesa znaleźć największy wspólny dzielnik

a) liczb 1071 i 462

b) wielomianów $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ i $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$.

odp: a) 21 , b) $x^2 + 1$

Zadanie 4 Odgadnąć jeden z pierwiastków z_0 wielomianu $P(z)$, i sprawdź że wielomian dzieli się bez reszty przez $(z - z_0)$, następnie znaleźć pozostałe pierwiastki.

a) $P(z) = 3z^3 - 7z^2 + 4z - 4$

b) $P(z) = z^5 + 1$

odp: a)2, $\frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{23})$ b) $e^{i\pi/5 + 2k\pi/5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Zadanie 5 Rozłożyć podane funkcje wymierne na sumę ułamków prostych. Rozważyć oddzielnie przypadek gdy są to funkcje wymierne liczby zespolonej oraz funkcje wymierne liczby rzeczywistej.

a) $\dfrac{2}{z^3 - z}$

b) $\dfrac{z+1}{(z^2+1)^2(z-1)}$

odp: a) $\frac{1}{1+z} - \frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}$, b) nad $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2(z-1)} - \frac{z}{z^2+1} - \frac{z+1}{2(z^2+1)}$, nad $\mathbb{C}$: $\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1+i}{4(z+i)} - \frac{1-i}{4(z-i)} - \frac{i}{4(z+i)^2} + \frac{i}{4(z-i)^2}$.

Zadanie 6 - ciekawostka Jaki związek z liczbami zespolonymi i tym co robimy ma zbiór Mandelbrota: