Baza, Odwzorowania liniowe.

Definicja 1 ***Bazą (uporządkowaną) przestrzeni wektorowej*** *V nazywamy układ wektorów $v_1, \ldots, v_k$, jeśli jest liniowo niezależny i generuje całą przestrzeń V, tzn.*

$$\forall_{v \in V} \exists_{\lambda_1, \ldots, \lambda_i \in \mathbb{K}} \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i$$

Definicja 2 *Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $F\colon V \to W$ jest* ***liniowe****, jeśli dla dowolnych $v_1, v_2, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ mamy*

(i) $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ *(addytywność)*

(ii) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ *(jednorodność)*

Definicja 3 *Niech $F\colon V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym.*

(i) Zbiór $\ker F := \{v \in V : F(v) = \vec{0}\} \subset V$ *nazywamy* ***jądrem*** *F*

(ii) Zbiór $\operatorname{Im} F := \{F(v) : v \in V\} \subset W$ *nazywamy* ***obrazem*** *F*

Zadanie 1 Sprawdzić, czy dane układy wektorów są bazami w odpowiednich przestrzeniach wektorowych:

a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, w $\mathbb{R}^3$

b) $\{x^2+1, x^2+2x+2, x+1\}$, $\{x^2+1, x^2+2x+2, 2x^2+2x+3\}$ w $\mathbb{R}_2[x]$

Zadanie 2 Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzni linowych:

a) $\{(2x, x+y, 3x-y, x-2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y = z-t\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x-2t = 0,\ x-y+z = 0\right\}$

c) $\{f \in \mathbb{R}_4[x] : f(-1) = 0, f(0) = 0\}$

Zadanie 3 Uzupełnić podane zbiory wektorów do baz we wskazanych przestrzeniach wektorowych:

(a) $\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}, \mathbb{R}^3$; (b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\right\}, \mathbb{R}^3$; (c) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\2\\1\end{bmatrix}\right\}, \mathbb{R}^4$;

(d) $\{2x-3, x^3+4x-1\}, \mathbb{R}_3[x]$; (e) $\{(x-1)^2, x^3-5x, 1-4x+2x^2\}, \mathbb{R}_3[x]$;

Zadanie 4 Wykaż że funkcje $f_1(t) = t+1$, $f_2(t) = t-3$, $f_3(t) = t^2+1$. tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[t]$. Znaleźć w tej bazie współrzędne następujących wektorów:

(a) 1, (b) t, (c) $2t^2+3t-1$,

Zadanie 5 Zbadać, czy dane odwzorowania przestrzeni wektorowych są liniowe:

a) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli $T(x) = 2x+3$

b) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli $T(x) = 4x^2$

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jeśli $T\big((x,y)\big) = (x-y, x^3-y)$

d) $T\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, jeśli $(Tf)(x) = 3f(x^2)$

e) $T\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, jeśli $(Tf)(x) = f'(x)f(x)$

Zadanie 6 Wyznaczyć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych:

a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, L jest rzutem prostopadłym na oś x

b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, L jest obrotem wokół początku układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{4}$

c) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, L jest symetrią względem osi y

Zadanie 7 Wyznaczyć bazy jąder i bazy obrazów dla podanych odwzorowań liniowych:

$$\text{(a) } F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2x-y \\ x+y \end{smallmatrix}\right], \quad \text{(b) } F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{smallmatrix}\right],$$

$$\text{(g) } F\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ (Fu)(x) = u(x) + (x-1)u(0),$$

Zadanie 8 Znaleźć przykłady przekształceń liniowych takich, że

a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ker F = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} t \\ -t \end{smallmatrix}\right] : t \in \mathbb{R} \right\},\ \operatorname{Im} F = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} r \\ s \\ t \end{smallmatrix}\right] : 2r = -s,\ 3s = 2t \right\}$

b) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \ker F = \left\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\rangle,\ \operatorname{Im} F = \left\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\rangle$

c) $F\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ \ker F = \langle x+1, x^2+1 \rangle,\ \operatorname{Im} F = \langle x^2 \rangle$

Czy F jest wyznaczone jednoznacznie?