Macierze

Definicja 1 *Jeśli* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *jest bazą w* V*, zaś* $f = (f_1, \ldots, f_m)$ *- bazą w* W*, to* ***macierzą odwzorowania*** $F \in L(V, W)$ *względem obu tych baz nazywamy macierz*

$$[F]^f{}_e = \begin{bmatrix} F^1{}_1 & \ldots & F^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ F^m{}_1 & \ldots & F^m{}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m{}_n,$$

której kolejne kolumny są wektorami $[F(e_1)]^f, \ldots, [F(e_n)]^f \in \mathbb{K}^m$*. Oznacza to, że liczby* $F^1{}_j, \ldots, F^m{}_j$ *są współrzędnymi wektora* $F(e_j)$ *w bazie* f*.*

Jeśli $e, \tilde{e}$ *- dwie bazy w* V *a* $f, \tilde{f}$ *- dwie bazy w* W*, to*

$$[F]^{\tilde{f}}{}_{\tilde{e}} = [id_W]^{\tilde{f}}{}_f [F]^f{}_e [id_V]^e{}_{\tilde{e}}.$$

Macierz typu $[id_V]^e{}_{\tilde{e}}$ *nazywa się* ***macierzą zmiany bazy*** *(macierzą przejścia z bazy* $\tilde{e}$ *do bazy* e*).*

Zadanie 1 Rozwiązać podane równania macierzowe:

$$\text{(a)} \quad 3\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X\right) + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X$$

Zadanie 2 Napisać macierze podanych odwzorowań liniowych w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni wektorowych:

$$\text{(a) } T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} x+y \\ 3x-6y \\ 4x-y \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} 5x-y+2z \\ -4x+3z-t \end{smallmatrix}\right]$$

Zadanie 3 Wyznaczyć macierz operatora $F\colon V \to V$, gdzie $V = \mathbb{R}_3[x]$, w bazie jednomianów $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x^3$, jeśli

$$\text{(a) } (Fv)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x), \quad \text{(b) } (Fv)(x) = xv'(x) + 2v(x), \quad \text{(c) } (Fv)(x) = (x-1)v(-2) + x^2 v''(x).$$

Zadanie 4 Niech $F \in L(V, V)$, gdzie $V = \mathbb{R}_3[t]$, będzie operatorem określonym wzorem $(Fv)(t) = v(t + a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest ustaloną liczbą. Wyznaczyć następujące macierze:

$$\text{(a) } [F]^e{}_e, \quad \text{(b) } [F]^{\tilde{e}}{}_e, \quad \text{(c) } [F]^{\tilde{e}}{}_{\tilde{e}},$$

jeśli $e = (e_0, e_1, e_2, e_3)$, gdzie $e_i(t) = t^i$, oraz $\tilde{e} = (\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, gdzie $\tilde{e}_i(t) = (t + a)^i$

Zadanie 5 Znaleźć macierze podanych odwzorowań liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni wektorowych:

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x-3y \end{bmatrix}; \quad \tilde{e} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]\right),\ \tilde{f} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right);$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} 2x-y \\ -3y-z \end{smallmatrix}\right]; \quad \tilde{e} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]\right),\ \tilde{f} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right);$

c) $T\colon \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad (Tu)(x) = x^2 u'(x) + u(-1); \quad \tilde{e} = (2x + 3, 3x - 4),\ \tilde{f} = (x^2 + x, x + 1, 1);$