Estymowanie, Klonowanie, Podsłuchiwanie

Seria 1

Zadanie 1 Wiemy, że ewolucja stanu w mechanice kwantowej jest reprezentowana przez działania jakiejś operacji unitarnej. Rozważmy układ kwantowy będący atomem dwupoziomowym, gdzie stan $|0\rangle$ oznacza stan podstawowy a $|1\rangle$ stan wzbudzony. Rozważmy operację która przekształca wektory $|0\rangle$, $|1\rangle$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \\ |1\rangle &\rightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right) \end{aligned}$$

Czy jest to operacja unitarna?

Zadanie 2 Rozważmy stany polaryzacyjne pojedynczego fotonu. Oznaczmy $|\leftrightarrow\rangle$, $|\updownarrow\rangle$ odpowiednio polaryzację poziomą i pionową. Niech $|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle = (|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle)/\sqrt{2}$, będzie odpowiadać polaryzacji liniowej pod kątem 45°, a $|\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle = (|\leftrightarrow\rangle - |\updownarrow\rangle)/\sqrt{2}$, będzie odpowiadać polaryzacji liniowej pod kątem 135°.

Poniżej podanych jest kilka zestawów operatorów. Dla każdego zestawu stwierdź czy może on być matematycznym opisem pomiaru kwantowego. Jeśli tak powiedz czy pomiar taki można zrealizować jako standardowy pomiar rzutowy von-Neumanna czy konieczny jest pomiar uogólniony

a) $\Pi_1 = |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow|$, $\Pi_2 = |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|$

b) $\Pi_1 = |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow|$, $\Pi_2 = |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|$, $\Pi_3 = |\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle\langle\nwarrow\!\!\!\searrow|$

c) $\Pi_1 = 1/2|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow|$, $\Pi_2 = 1/2|\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|$, $\Pi_3 = 1/2|\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle\langle\nwarrow\!\!\!\searrow|$, $\Pi_4 = 1/2|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle\langle\swarrow\!\!\!\nearrow|$

Zadanie 3 Napisz macierze gęstości opisujące stan polaryzacyjny fotonu dla następujących sytuacji:

a) Ktoś przysyła Ci foton o polaryzacji pionowej z prawdopodobieństwem 1/3, a z prawdopodobieństwem 2/3 przysyła foton o polaryzacji pionowej

b) Ktoś przysyła Ci foton o polaryzacji pionowej z prawdopodobieństwem 1/2, a z prawdopodobieństwem 1/2 przysyła foton o polaryzacji pod kątem 45°

c) Ktoś przysyła Ci foton o polaryzacji pod kątem 45° z prawdopodobieństwem 1/2, a z prawdopodobieństwem 1/2 przysyła foton spolaryzowany pod kątem 135°.

Zadanie 4 Stan dwóch atomów dwupoziomowych opisany jest stanem czystym:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \otimes |1\rangle. \tag{1}$$

a) Czy jest to stan splątany czy produktowy?

b) Napisz macierz gęstości odpowiadającą stanowi atomu pierwszego, jeśli nie mamy dostępu do stanu atomu drugiego

c) Napisz inny stan czysty dwóch atomów, który prowadzi do takiej samej zredukowanej macierzy gęstości pierwszego atomu

Powtórz powyższe punkty dla stanu:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \otimes |0\rangle. \tag{2}$$

Zadanie 5 Rozważmy dwie wiadomości. Jedna złożona z czterech znaków $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$. przy czym znak $\clubsuit$ występuje średnio z częstością 1/2, znak $\diamondsuit$ z częstością 1/4, znak $\heartsuit$ z częstością 1/8 i znak $\spadesuit$ z częstością 1/8. Druga złożona z trzech znaków występujących z równymi prawdopodobieństwami 1/3. Ile w przybliżeniu znaków każdej z wiadomości możemy wysłać za pomocą N bitów (zakładamy, że N duże).

Zadanie 6 Rozważmy dwie binarne zmienne losowe X i Y których prawdopodobieństwo łączne $p(x, y)$ wynosi:

$$p(0,0) = 1/4,\ p(0,1) = 1/8,\ p(1,0) = 1/8,\ p(1,1) = 1/2 \tag{3}$$

a) Oblicz średnią entropię warunkową $H(Y|X)$

b) Oblicz informację wzajemną $I(X : Y)$

Zadanie 7 Zmierzono, że poziom błędów w pewnej linii telefonicznej wynosi 10^{-3}. Ile fizycznych bitów trzeba co najmniej wysłać, aby przesłać N bitów logicznych?

Zadanie 8 Poniżej podanych jest kilka par stanów. Uszereguj pary od pary zawierającej stany najłatwiej rozróżnialne do pary zawierającej stany najtrudniej rozróżnialne (jeśli rozróżnialność jest taka sama dla jakiś par zaznacz to). Stan $|\alpha\rangle$ oznacza stan fotonu o polaryzacji liniowej pod kątem α do poziomu.

a) $|30°\rangle$, $|60°\rangle$

b) $|30°\rangle$, $|120°\rangle$

c) $|30°\rangle^{\otimes 2}$, $|120°\rangle^{\otimes 2}$

d) $|30°\rangle^{\otimes 2}$, $|60°\rangle^{\otimes 2}$

Zadanie 9 Przez pewien idealny kanał qubitowy wysyłano z równymi prawdopodobieństwami 4 znaki kodowane za pomocą 4 różnych stanów: $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$, gdzie $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, a następnie mierzono stan qubitu na wyjściu. Oblicz informację wzajemną takiego kanału jeśli stan na wyjściu mierzono używając pomiaru:

a) $\Pi_1 = |0\rangle\langle 0|$, $\Pi_2 = |1\rangle\langle 1|$

b) $\Pi_1 = 1/2|0\rangle\langle 0|$, $\Pi_2 = 1/2|1\rangle\langle 1|$, $\Pi_3 = 1/2|+\rangle\langle +|$, $\Pi_4 = 1/2|-\rangle\langle -|$.

c) $\Pi_1 = |i\rangle\langle i|$, $\Pi_2 = |-i\rangle\langle -i|$, gdzie $|i\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$, $|-i\rangle = (|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$

Odpowiedzi

Zadanie 1 nie

Zadanie 2

a) tak von-Neumana

b) nie, nie sumują się do jedynki

c) tak, uogólniony.

Zadanie 3

a) $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Zadanie 4 Dla pierwszego stanu:

a) splątany

b) $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$

c) np. $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \otimes |0\rangle$

Dla drugiego stanu:

a) produktowy

b) $\begin{bmatrix} 1/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

c) np. $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \otimes |1\rangle$

Zadanie 5 Dla pierwszego przypadku: $4N/7 \approx 0.57142\ N$; Dla drugiego: $0.63093\ N$ znaków

Zadanie 6 $H(Y|X) = 0.7956$; $I(X:Y) = 0.1589$

Zadanie 7 $1.01154\ N$

Zadanie 8 2 i 3, 4, 1

Zadanie 9

a) 1/2 bitu

b) 1/2 bitu

c) 0 bitów