Zadania domowe z Informatyki kwantowej

Seria 6

4 I 2006

Zadanie 1 Rozważmy algorytm Deutscha, pozwalający rozróżnić czy funkcja „zamknięta w pudełku" jest stała czy zbalansowana, w przypadku gdy badane funkcje określone są na liczbach 3 bitowych: $f : \{0,1\}^3 \mapsto \{0,1\}$. Rozważ sytuację w której „w pudełku zamknięta" jest funkcja stała f_1 która każdej liczbie trzybitowej na wejściu przypisuje wartość 1, oraz sytuację w której w pudełku zamknięta jest funkcja zbalansowana f_2 która liczbom: $000, 001, 010, 100$ przypisuje wartość 1, a liczbom $011, 101, 110, 111$ przypisuje wartość 0. W każdym z dwóch przypadków napisz jaki stan czterech qubitów otrzymamy na wyjściu po wykonaniu algorytmu Deutscha.

Zadanie 2 Jednym z elementów algorytmu Grovera, jest operacja, która wektor bazowy $|0\rangle$ zmienia na $-|0\rangle$, a wszystkie pozostałe wektory bazowe pozostawia bez zmian. Rozważmy tę operację w sytuacji gdy działa na dwa qubity (czyli mamy przestrzeń czterowymiarową: $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$). Zaproponuj schemat bramek kwantowych realizujących tę operację, używają tylko bramek Hadamarda, bramek CNOT, i jednoqubitowych bramek $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3 Rozważmy działanie algorytmu Grovera w sytuacji wyszukiwania jednej liczby z pośród czterech. Zakładając, że wyszukiwaną liczbą jest 0, napisz w jawny sposób (jako macierz 4×4) jedną iterację w algorytmie Grovera. Podziałaj tą operacją jednokrotnie na stan, taki jaki jest przygotowywany w algorytmie Grovera. Jakie jest prawdopodobieństwo, że algorytm Grovera po tej jednej iteracji da nam oczekiwany wynik?

Narysuj obwód kwantowy realizujący algorytm Grovera, w sytuacji wyszukiwania jednej liczby spośród czterech. Narysuj obwód przy pomocy bramek Hadamarda, CNOT, X, oraz z bramki pełniącej funkcję „wyroczni". Dla ułatwienia skorzystaj z wyniku Zadania 1.

Zadanie 4 Rozważmy algorytm Grovera w sytuacji, gdy wyszukujemy jedną liczbę spośród 256. Ile iteracji w algorytmie Groovera należy wykonać aby uzyskać pożądaną odpowiedź z największym możliwym prawdopodobieństwem? Ile wynosi to prawdopodobieństwo?

Wskazówki

2. Spróbuj najpierw znaleźć schemat realizujący operację, która zamienia $|3\rangle \to -|3\rangle$, a pozostałe wektory bazowe pozostawia bez zmian. Do tej operacji wystarczy użyć dwóch bramek Hadamarda i jednej CNOT. Potem używając bramek X spróbuj osiągnąć upragniony cel.

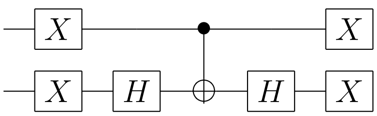
3. Zauważ, że w tej sytuacji wystarczy tylko jedna iteracja algorytmu Groovera do znalezienia szukanej liczby

4. Każda iteracja w algorytmie Grovera odpowiada obrotowi który zbliża nas do szukanego stanu. Znając kąt o jaki obraca nas jedna iteracja i kąt jaki musimy przebyć możemy stwierdzić po ilu iteracjach znajdziemy się w pobliżu poszukiwanego stanu. Kąt θ o jaki obraca nas jedna iteracja zadany jest wzorem $\cos(\theta/2) = \sqrt{(N-M)/N}$, gdzie N, M oznacza, że szukamy M liczb pośród N. Kąt ψ między wektorem początkowym, z którego startujemy w algorytmie Grovera, a wektorem docelowym zady jest wzorem $\cos\psi = \sqrt{M/N}$.

Odpowiedzi

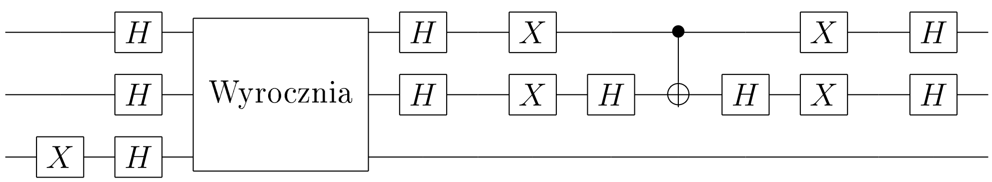
1. $f_1: \ -|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$,

   $f_2: \ \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

2. 

3. $$1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

   jeśli twój wynik jest taki sam z dokładnością do globalnego znaku „-” to OK, bo pamiętaj, *że globalna faza nie ma znaczenia*. Prawdopodobieństwo wynosi 1. Obwód kwantowy (na wejściu wpuszczamy trzy qubity w stanie $|0\rangle$):

4. Liczba iteracji: 12. Prawdopodobieństwo sukcesu=99,995%

Powodzenia!

Marek Kuś
Rafał Demkowicz-Dobrzański[1]

[1] zadania są dostępne pod adresem: www.cft.edu.pl/~demko/zadania.html