Informacja Kwantowa 1/2

Seria przygotowawcza do egzaminu

Zadanie 1. Zaprojektować układ złożony z liniowych elementów optycznych pozwalający na optymalne (tzn. z największym prawdopodobieństwem sukcesu) jednoznaczne rozróżnienie stanów $\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\leftrightarrow\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\updownarrow\right\rangle$ oraz $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\left|\leftrightarrow\right\rangle + i\left|\updownarrow\right\rangle\big)$.

Zadanie 2. Alicja wysyła Bobowi qubit przygotowany z w jednym z czterech stanów:

$$|\tau_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\tau_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, |\tau_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{2\pi i/3}\sqrt{2} \end{pmatrix}, |\tau_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2\pi i/3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bob mierzy qubit przy użyciu miary opisanej czterema operatorami $\hat{M}_i = \frac{1}{2}|\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|, i = 1, 2, 3, 4$, gdzie

$$|\upsilon_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\tau_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, |\tau_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{-2\pi i/3}\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, |\tau_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{2\pi i/3}\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Znaleźć prawdopodobieństwa warunkowe $p(i|j) = \langle\tau_j|\hat{M}_i|\tau_j\rangle$ otrzymania wyniku i jeśli Alicja wysłała stan $|\tau_j\rangle$.

b) Obliczyć informację wzajemną $I(A:B)$ gdy stany $|\tau_j\rangle$ są wysyłane przez Alicję z jednakowymi prawdopodobieństwami wynoszącymi $\frac{1}{4}$.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że qubit Alicji z poprzedniego zadania (oznaczany odtąd indeksem A) został przechwycony przez Ewę i poddany transformacji klonującej z qubitami E oraz E' zadanej wzorami:

$$|0\rangle_A|0\rangle_E|0\rangle_{E'} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\big(|000\rangle_{AEE'} + |011\rangle_{AEE'} + |101\rangle_{AEE'} + |110\rangle_{AEE'}\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}|\Phi_-\rangle_{AE}|0\rangle_{E'}$$
$$|1\rangle_A|0\rangle_E|0\rangle_{E'} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\big(|111\rangle_{AEE'} + |001\rangle_{AEE'} + |010\rangle_{AEE'} + |100\rangle_{AEE'}\big) - \frac{1}{\sqrt{3}}|\Phi_-\rangle_{AE}|1\rangle_{E'}$$

gdzie $|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big)$.

a) Zakładając, że stan na wejściu ma postać $|\psi\rangle_A|0\rangle_E|0\rangle_{E'}$, gdzie $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_B$ obliczyć zredukowane macierze gęstości pojedynczych qubitów A oraz E po oddziaływaniu.

b) Obliczyć wierność klonowania dla qubitów A oraz E po oddziaływaniu w funkcji stanu wejściowego. Opisać odpowiadające temu przekształcenie sfery Blocha.

c) Załóżmy, że Alicja wysyła z równymi prawdopodobieństwami jeden z czterech stanów $|\tau_j\rangle$. Przypuśćmy, że Ewa dokonuje powyższej operacji klonowania i po transformacji klonującej jeden z klonów (qubit A) wysyła B, a drugi klon (qubit E) zachowuje sobie. Zarówno Bob jak i Ewa wykonują na otrzymanym klonie pomiar zadany operatorami $\hat{M}_i$. Obliczyć $I(A:B)$, $I(A:E)$ oraz wielkość, której nie liczyliśmy na zajęciach: $I(B:E)$.

d) Obliczyć wielkość Holevo dla zestawu stanów qubitu A wysyłanych przez Alicję oraz tych po transformacji klonującej Ewy.

Zadanie 4. Mając stan dwóch podukładów ρ_{AB}, kryterium splątania PPT mówi, że jeśli macierz $\rho_{AB}^{T_B}$ (częściowa transpozycja względem układu B), nie jest dodatnio określona to stan jest splątany. Na ćwiczeniach rozważaliśmy stan dwóch qubitów:

$$\rho = p \left|\Psi^-\right\rangle \left\langle\Psi^-\right| + \frac{(1-p)}{4}\mathbb{1} \tag{1}$$

gdzie $|\Psi^-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ i pokazaliśmy, że dla $p > 1/3$ kryterium PPT mówi, że stan jest splątany. Na podstawie kryterium PPT nie ma natomiast pewności, że dla $p \leq 1/3$ stan jest separowalny. [1]

Żeby to pokazać można po prostu dla $p \leq 1/3$ spróbować jawnie napisać rozkład stanu ρ_{AB} na stany produktowe i wtedy mamy już kompletne rozwiązanie. Postaraj się znaleźć taki rozkład.

Wskazówka. Najpierw udowodnij, że trzy stany postaci

$$\rho_i = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sigma_i \otimes \sigma_i\right), \tag{2}$$

gdzie σ_i są trzema macierzami Pauliego, są separowalne pisząc ich jawny rozkład na mieszankę stanów produktowych. Potem zmierz się z przypadkiem $p = 1/3$ a następnie z $p < 1/3$.

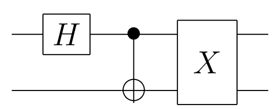
Zadanie 5 Łamanie nierówności Bella można traktować jako kryterium splątania. Wiemy, że kryterium PPT w pełni pozwala nam opisać zakres wartości parametru p dla którego stan postaci:

$$\rho = p \left|\Psi^-\right\rangle \left\langle\Psi^-\right| + \frac{(1-p)}{4}\mathbb{1} \tag{3}$$

jest splątany a dla jakich p jest separowalny.

Na zajęciach pokazane było, że stan $|\Psi^-\rangle$ maksymalnie łamie nierówność Bella dając wynik $|C| = 2\sqrt{2}$. Zbadaj dla jakich p stan ρ będzie łamał nierówność Bella. Czy nierówności Bella są równie dobrym kryterium splątania co PPT?

Zadanie 6 Rozważ obwód kwantowy postaci:



gdzie X jest bramką dwuqubitową dokonującą operacji:

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\right) \\ |1\rangle \otimes |1\rangle \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle\right) \end{aligned}$$

a pozostałe wektory bazowe pozostawia bez zmian.

a) Napisz macierz odpowiadającą powyższemu obwodowi kwantowemu

b) Jaki stan uzyskamy na wyjściu obwodu jeśli wpuścimy do niego stan $|0\rangle \otimes |0\rangle$

c) Napisz macierz odpowiadającą operacji odwrotnej

d) Narysuj obwód kwantowy operacji odwrotnej

[1] Dla dwóch qubitów okazuje się, że kryterium PPT daje taką pewność, ale my tego nie udowodniliśmy, więc udajemy, że o tym nie wiemy.