Informacja Kwantowa 1/2

Seria 3

do oddania na 14.03.2013

Operator rzutowy na stan $|\psi\rangle$ możemy przedstawić za pomocą wektora Blocha $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ jako

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbb{1}} + \sum_{j=1}^{3} s_j \hat{\sigma}_j\right).$$

Wynik działania transformacji unitarnej $\hat{U}$ na stan $|\psi\rangle$ dany jest więc wyrażeniem

$$\hat{U}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{U}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbb{1}} + \sum_{i=1}^{3} s_j \hat{U}\hat{\sigma}_j\hat{U}^\dagger\right).$$

Widać, że operatory $\hat{U}\hat{\sigma}_i\hat{U}^\dagger$, $i = 1, 2, 3$, są bezśladowe. Możemy zatem zapisać je jako:

$$\hat{U}\hat{\sigma}_j\hat{U}^\dagger = \sum_{i=1}^{3} O_{ij}\hat{\sigma}_i.$$

Stąd

$$\hat{U}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{U}^\dagger = \frac{1}{2}\left[\hat{\mathbb{1}} + \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} O_{ij} s_j\right)\hat{\sigma}_i\right]$$

i wektor Blocha stowarzyszony ze stanem $\hat{U}|\psi\rangle$ możemy zapisać jako $\mathbf{Os}$, gdzie $\mathbf{O}$ jest macierzą 3×3 złożoną ze współczynników O_{ij}.

a) Wyrazić elementy O_{ij} przez ślady $\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_i\hat{U}\hat{\sigma}_j\hat{U}^\dagger)$.

b) Podać jawną postać macierzy $\mathbf{O}$ dla transformacji unitarnych $\hat{U}$ danych wyrażeniami

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} \cos\frac{\xi}{2} & \sin\frac{\xi}{2} \\ -\sin\frac{\xi}{2} & \cos\frac{\xi}{2} \end{pmatrix}$$

Jakim przekształceniom sfery Blocha odpowiadają otrzymane macierze $\mathbf{O}$?