# Informacja Kwantowa 1/2

## Seria 5

do oddania na 15.11.2017

**Zadanie 1** Rozważ kwantowy układ dwupoziomowy $S$, o wektorach bazowych $|0\rangle_S$ ,$|1\rangle_S$, oraz otoczenie $E$ będące również układem dwupoziomowym przygotowanym w chwili początkowej w stanie $|0\rangle_E$. Efekt oddziaływania układu z otoczeniem reprezentuje ewolucja unitarna, której działanie na wektory bazowe $|i\rangle_S \otimes |0\rangle_E$ ma postać:

$$U|0\rangle_S \otimes |0\rangle_E = |0\rangle_S \otimes |0\rangle_E, \quad U|1\rangle_S \otimes |0\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S \otimes |1\rangle_E + |1\rangle_S \otimes |0\rangle_E).$$

Załóżmy, że w chwili początkowej stan układu i otoczenia jest postaci:

$$|\Psi\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S + e^{i\varphi}|1\rangle_S) \otimes |0\rangle_E,$$

gdzie $\varphi$ jest dowolną fazą

a) Znajdź końcowy stan $|\Psi'\rangle_{SE}$ powstający w wyniku zadziałania operacją $U$ na stan $|\Psi\rangle_{SE}$.

b) Znajdź zredukowaną macierz gęstości układu $S$ po oddziaływaniu z otoczeniem. Zbadaj, czy „stopień zmieszania” zredukowanej macierzy gęstości zależy od wartości parametru $\varphi$.

c) Znajdź zredukowaną macierz gęstości układu $E$ i porównaj ze zredukowaną macierzą układu $S$.

**Zadanie 2** Przypuśćmy, że źródło emituje pary fotonów, których indywidualne polaryzacje są całkowicie losowe, lecz zawsze ortogononalne względem siebie. Stan taki można opisać operatorem gęstości

$$\hat{\varrho}_{AB} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\mathbf{s}\, |\mathbf{s}\rangle_A \langle \mathbf{s}| \otimes |-\mathbf{s}\rangle_B \langle -\mathbf{s}|.$$

gdzie całkowanie $\int d^2\mathbf{s}$ należy wykonać po sferze Blocha o promieniu jednostkowym:

$$\int d^2\mathbf{s} = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi, \qquad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) Znaleźć postać macierzową $\hat{\varrho}_{AB}$ w bazie $|{\leftrightarrow}{\leftrightarrow}\rangle, |{\leftrightarrow}{\updownarrow}\rangle, |{\updownarrow}{\leftrightarrow}\rangle, |{\updownarrow}{\updownarrow}\rangle$. Pokazać, że $\hat{\varrho}_{AB}$ jest kombinacją liniową $\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}$ oraz operatora rzutowego na stan singletowy $|\Psi_-\rangle_{AB}\langle\Psi_-|$.

b) Obliczyć funkcję korelacji $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathrm{Tr}_{AB}[\hat{\varrho}_{AB}(\hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}})]$. Czy można znaleźć jednostkowe wektory $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ dla których będzie łamana nierówność CHSH $|C(\mathbf{a},\mathbf{b}) + C(\mathbf{a}',\mathbf{b}) + C(\mathbf{a},\mathbf{b}') - C(\mathbf{a}',\mathbf{b}')| \leq 2$ ?