Informacja Kwantowa 1/2

Seria 14

do oddania na 02.06.2011

Operacją kwantową nazywamy sekwencję operatorów $\{\hat{K}_i\}$ indeksowaną wskaźnikiem i spełniającą warunek

$$\sum_i \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = \hat{\mathbb{1}}. \tag{1}$$

Operacji kwantowej możemy poddać układ fizyczny przygotowany w stanie kwantowym opisanym macierzą gęstości $\hat{\varrho}$. Wynikiem operacji kwantowej jest:

i) jedna z możliwych wartości indeksu i, którą traktujemy jako *klasyczny* wynik operacji kwantowej. Prawdopodobieństwo otrzymania wyniku i jest dane wzorem:

$$p_i = \mathrm{Tr}(\hat{K}_i \hat{\varrho} \hat{K}_i^\dagger)$$

ii) warunkowa transformacja stanu kwantowego układu dana wzorem:

$$\hat{\varrho} \to \hat{\varrho}_i = \frac{1}{p_i} \hat{K}_i \hat{\varrho} \hat{K}_i^\dagger.$$

Rozważmy operację kwantową działającą na dwóch qubitach A i B złożoną z dwóch operatorów:

$$\hat{K}_0 = |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|, \qquad \hat{K}_1 = \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} - |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|,$$

gdzie jak zwykle $|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, zaś $\hat{\mathbb{1}}$ jest operatorem identycznościowym dla pojedynczego qubitu. Załóżmy, że oba qubity zostały przygotowane w takim samym stanie opisanym wektorem Blocha $\mathbf{s}$, zatem ich łączny stan jest dany macierzą gęstości

$$\hat{\varrho} = \tfrac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}} + \mathbf{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes \tfrac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}} + \mathbf{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}).$$

a) Sprawdzić, że warunek (1) jest spełniony dla operacji $\{\hat{K}_0, \hat{K}_1\}$.

b) Obliczyć $\hat{K}_0 \hat{\varrho} \hat{K}_0^\dagger$ oraz $\hat{K}_1 \hat{\varrho} \hat{K}_1^\dagger$.

c) Znaleźć prawdopodobieństwa p_0 oraz p_1.

d) Z uwagi na symetrię problemu, zredukowane macierze gęstości pojedynczych qubitów po operacji kwantowej powinny być identyczne. Znaleźć wektor Blocha $\hat{\mathbf{s}}_i$ odpowiadający zredukowanej macierzy gęstości pojedynczego qubitu $\hat{\varrho}_i^{(A)} = \mathrm{Tr}_B(\hat{\varrho}_i)$. Można go zapisać jawnie jako:

$$\mathbf{s}_i = \mathrm{Tr}_{AB}[(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \hat{\mathbb{1}})\hat{\varrho}_i].$$

e) Czy wektory $\mathbf{s}_i$ są współliniowe z wektorem $\mathbf{s}$? Jeśli tak, podać współczynniki proporcjonalności.

Uwaga: Ocenie będą podlegały wyniki punktów c) i e).