Ćwiczenia 1

14 lutego 2014
14:05

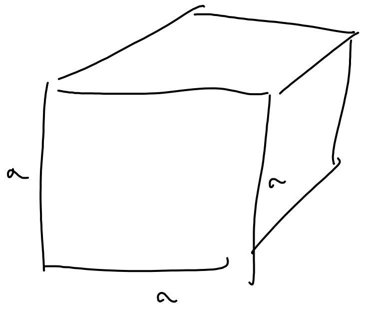
1. Trochę filozofowania
2. Rozkład Plancka
3. Efekt Comptona
4. Ciepło właściwe (Model Einsteina, ew. Debyea)
5. Czas życia klasycznego atomu - elektron spadający na jądro
6. Model Bohra?

Max Planck:
„Kiedy rozpoczynałem studia fizyczne (~1880r) i u mego czcigodnego nauczyciela Philippa von Jolly'ego zasięgałem opinii na temat warunków
i perspektyw moich studiów, przedstawił mi on fizykę jako naukę wysoko rozwiniętą, prawie całkowicie dojrzałą, która po ukoronowaniu jej osiągnięć przez odkrycie zasady zachowania energii miała już wkrótce przyjąć ostateczną postać. Wprawdzie w tym czy innym zakątku pozostaje jeszcze do zbadania i usunięcia jakiś pyłek czy pęcherzyk, ale jeśli chodzi o system jako całość, to jest on dość zabezpieczony, a fizyka teoretyczna wyraźnie zbliża się do osiągnięcia takiej doskonałości, jaka od stuleci jest właściwa geometrii."

"Wszystkie najważniejsze fundamentalne prawa i fakty w fizyce
zostały już odkryte i tak dobrze ustalone, iż jest znikome
prawdopodobieństwo, że zostaną one uzupełnione w wyniku nowych odkryć."
Albert A. Michelson (1899)

Drobne problemy fizyki klasycznej

1. Rozkład Plancka



Mody pola e-m: (fale stojące)

$$A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin(\omega t)$$

rów. falowe $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) E(\vec{r},t) = 0$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad k_x = \frac{n_x \pi}{a}, \ldots$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \underbrace{\frac{4a^2}{c^2}\nu^2}_{R^2}$$

Liczba dopuszczalnych modów poniżej częstości ν:

$$N(\nu) = \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a\nu}{c}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3\nu^3}{c^3}$$

gęstość modów:

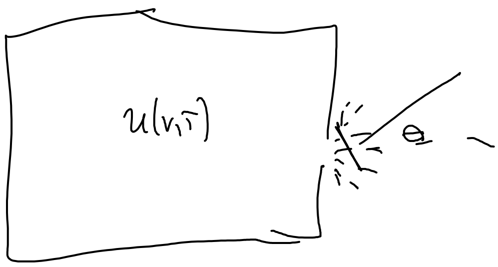
$$n(\nu) = \frac{4\pi a^3\nu^2}{c^3}\cdot \underbrace{2}_{\text{2 polaryzacje}}$$

zgodnie z zasadą ekwipartycji na każdy stopień swobody $\frac{1}{2}kT$. (Dwa st. swobody pole E i B)

Gęstość energii

$$u(\nu,T) = n(\nu)\cdot kT = 8\pi\nu^2\, kT$$

$$u(\nu,T) = \frac{n(\nu)\cdot kT}{a^3} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, kT$$



$\frac{c\cdot u}{4\pi}\, d\Omega$ ~ strumień w $d\Omega$ z danego punktu

Powierzchnia dS emituje

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cu}{4\pi}\, d\theta \sin\theta \, dS \cos\theta = \frac{cu}{4} dS = \underbrace{\rho(\nu,T)\, dS}_{\text{strumień energii w przedziale } \nu, \nu+d\nu}$$

zdolność emisyjna

↓

$$\rho(\nu,T) = \frac{cu}{4} = \frac{2\pi\nu^2}{c^3}\, kT$$

Σ im wyższa częstości tym więcej energii – wszystko powinno promieniować γ.

Hipoteza Plancka

materia może wymieniać energię ze światłem jedynie w porcjach $h\nu$,

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

zamiast: $p(E) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{kT}}$ mamy:

$$p(n) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{n h\nu}{kT}} \qquad Z = \frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

energia na mod:

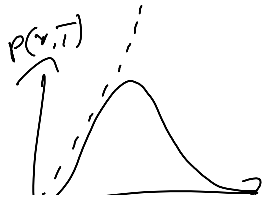
$$\langle E\rangle = \sum_n n h\nu\, p(n) = h\nu\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \sum_n n e^{-\frac{nh\nu}{kT}} =$$

$$= h\nu\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \cdot -\frac{d}{dx}\left(\sum_n e^{-nx}\right)\Big|_{x=\frac{h\nu}{kT}} =$$

$$= -\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{h\nu}{\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

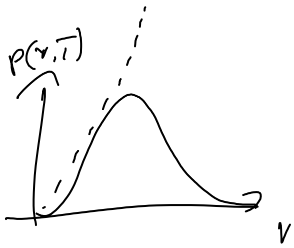
dla $h\nu \ll kT$ $\quad \langle E\rangle = kT$

$$\rho(\nu,T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)}$$



dla $h\nu \ll kT$ $\quad \langle E \rangle = kT$

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)}$$

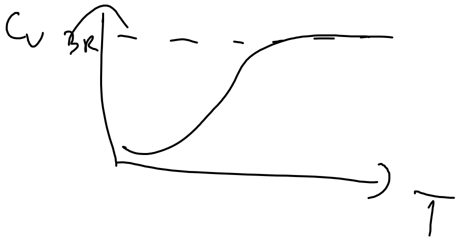


Max Planck 1912
"Kiedy myśli się o wszystkich eksperymentalnych potwierdzeniach
elektrodynamiki Maxwella w badaniach nawet najbardziej złożonych zjawisk interferencji,
kiedy myśli się o niezwykłych trudnościach w objaśnianiu zjawisk elektrycznych
i magnetycznych przez teorie, które by odrzucały tę elektrodynamikę, to instynktownie przyjmuje
się wrogi stosunek do wszelkich prób poruszenia tego fundamentu. Dlatego też pozostawimy nadal
na uboczu hipotezę kwantów światła, tym bardziej, że jest ona jeszcze w stadium
zarodkowym. Będziemy przyjmowali, że wszystkie zjawiska zachodzące w próżni
dokładnie odpowiadają równaniom Maxwella

2. Ciepło właściwe ciał stałych

Klasycznie każdy atom w sieci 6 stopni swobody

$$U = 3nRT = 3NkT, \quad C_V = \frac{1}{n}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V = 3R$$



obserwowany spadek ciepła właściwego dla niskich temperatur

$$U = 3N \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad \text{(Model Einsteina)}$$

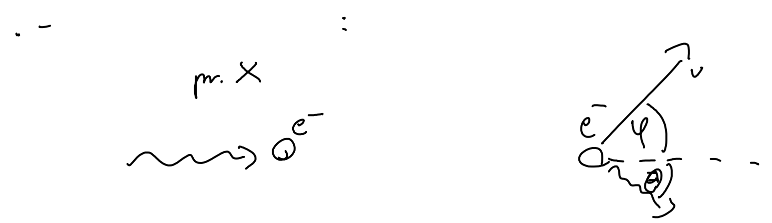
$$\frac{\partial U}{\partial T} = -3N\frac{h\nu}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} e^{\frac{h\nu}{kT}} \cdot \left(-\frac{h\nu}{k}\frac{1}{T^2}\right) = 3nk\frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2}$$

$$C_V = 3R\frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \underset{h\nu \ll kT}{\simeq} 3R$$

$$\underset{h\nu \gg kT}{\simeq} \frac{3R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} \to 0$$

jakościowo ok.

3. Efekt Comptona



widzimy w rozproszonym promieniowaniu składowe o zmienionej długości fali.

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \qquad \text{energia}$$

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = mv\sin\varphi \qquad \text{pęd } y$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cdot\cos\theta + mv\cos\varphi$$

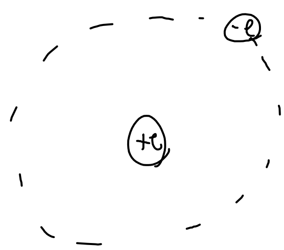
$$\vdots$$

$$\Delta\lambda = \underbrace{\frac{h}{m_0c}}_{\lambda_C}(1-\cos\theta)$$

λ_C - comptonowska długość fali

$$\lambda_C \approx 2{,}4\cdot 10^{-12}\,m$$

4. Klasyczny atom wodoru



$$r = a_0 = 0{,}5\cdot 10^{-10}\,m$$

prędkość elektronu

$$k\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} = \sqrt{\frac{8{,}9\cdot 10^9\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-10}}} \simeq$$

$$\simeq 10^6\,\frac{m}{s} \ll c = 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

w granicy nierelatywistycznej przyspieszający ładunek emituje promieniowanie o mocy

$$P = \frac{\mu_0 e^2 a^2}{6\pi c}$$ – wzór Larmora

a – przyspieszenie

Po jakim czasie elektron spadnie na jądro?

Przyjmijmy, że cały czas orbita kołowa

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r} \qquad a = \frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{mr^2}$$

$$r = -\frac{ke^2}{2E} \qquad \dot{r} = \frac{ke^2}{2E^2} P$$

$$\dot{r} = -\frac{ke^2\, 4r^2}{2\cancel{k^2}\cancel{e^4}} \cdot \frac{\mu_0 e^2}{\cancel{6}\pi c} \frac{\cancel{k^2}\cancel{e^4}}{m^2 r^4} = \frac{ke^4\mu_0}{3\pi c r^2 m^2}$$

$$r_e = k\frac{e^2}{mc^2}$$

pr. klasyczny elektronu

$$dr\, r^2 = -\frac{ke^4\mu_0}{3\pi c m^2} dt$$

$$-\frac{1}{3}(10^{-10})^3 = -T \frac{ke^4\mu_0}{3\pi c m^2} \simeq T \frac{r_e^2 \mu_0 c^3}{3\pi k} = \frac{4}{3} r_e^2 c T$$

$$10^{-30} = T \cdot \frac{8{,}9\cdot 10^{10} (1{,}6\cdot 10^{-19})^4\, 4\pi\cdot 10^{-7}}{3\pi \quad 3\cdot 10^8 \left[(9{,}1)\cdot 10^{-31}\right]^2}$$

$$10^{-30} = T \cdot \frac{10^{11} \cdot 10^{-76} \cdot 10^{-7}}{10^9 \cdot 10^{-60}} = T \cdot \frac{10^{-72}}{10^{-51}}$$

$$T \approx 10^{-10}\, s$$