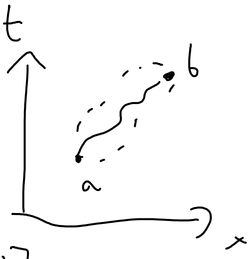
Cwiczenia 11

27 marca 2014

21:13

1. Całki po trajektoriach



• przypomnienie

$$G(x_b,t_b,x_a,t_a) = \int_a^b Dx(t)\; e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$$

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)\,dt$$

<u>Przykład:</u> oscylator harmoniczny:

f. Greena:

$$G(x_b,t_a,x_a,t_b) = \sum_n e^{-iE_n(t_b-t_a)}\,|A_n|^2 H_n(x_a) H_n(x_b)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x_a^2+x_b^2)}$$

Trudne ....

Spróbujmy całek po trajektoriach

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Niech $\bar{x}(t)$ klasyczna trajektoria z a do b

a $S[\bar{x}(t)]$ odpowiadające działanie

Wprowadźmy zmienną $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, $y(t_a)=0$, $y(t_b)=0$

$y(t_b)=0$ $\dot{y}(t_b)=0$

$$L = \frac{m(\dot{\bar{x}}+\dot{y})^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2(\bar{x}+y)^2 =$$

$$= \frac{m\dot{\bar{x}}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2\bar{x}^2 + m\dot{\bar{x}}\dot{y} - m\omega^2\bar{x}y$$

$$+ \frac{m\dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

$$G(x_b,t_b,x_a,t_a) = \int_a^b \mathcal{D}x(t)\, e^{\frac{iS[x(t)]}{\hbar}}$$

$$S[x(t)] = S[\bar{x}(t)] + \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} dt\, m\dot{\bar{x}}\dot{y} - m\omega^2\bar{x}y}_{\overset{\shortparallel}{0}} + S[y(t)]$$

bo $\bar{x}$ odpowiada extremum działania

$$G(x_b,t_b,x_a,t_a) = e^{\frac{iS[\bar{x}(t)]}{\hbar}} \underbrace{\int \mathcal{D}y(t)\, e^{\frac{iS[y(t)]}{\hbar}}}_{f(t_b-t_a)}$$

bo $y(t_a) = y(t_b) = 0$

$\dot{y}(t_a) = \dot{y}(t_b) = 0$

Czyli z dokładnością do czynnika normalizującego zależnego od różnicy czasów f. Grena dana przez klasyczne działanie. – (prawda dla wszystkich kwadratowych Lagranżjanów).

Obliczmy $S[\bar{x}(t)]$ … w oscylatorze klasycznym

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0)\cos\omega t - x(0)\omega\sin\omega t$$

$$S = \int_0^T \frac{m}{2}\left(\dot{x}(0)\cos\omega t - x(0)\omega\sin\omega t\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\left(x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t\right)^2 =$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^T \left(\dot{x}^2(0) - x^2(0)\omega^2\right)\cos 2\omega t - 2\dot{x}(0)x(0)\sin 2\omega t\,\omega =$$

$$= \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x}_a^2 - x_a^2\omega^2\right)\frac{\sin 2\omega T}{2\omega} + \frac{2\dot{x}_a x_a(\cos 2\omega T - 1)}{2}\right.$$

$$\left\{\dot{x}_a = \frac{x_b\,\omega - x_a\,\omega\cos\omega T}{\sin\omega T}\right.$$

$$= \frac{m}{2}\left[x_b^2\omega^2 - 2x_b x_a\cos\omega T + x_a^2\cos^2\omega T - \omega^2 \cdot \frac{\cos\omega T}{\cancel{\sin 2\omega T}}\right.$$

$$- 2\Big[\frac{\qquad}{\sin^2 \omega T} \qquad \ldots$$

$$- \frac{2\left(x_b\, \omega - x_a\, \omega\cos\omega T\right)\left(\cancel{\cos 2\omega T - 1}\right)\sin\omega T\, x_a}{\cancel{2}\ \cancel{\sin\omega T}}$$

$$- \frac{x_a^2 \sin 2\omega T\, \omega}{2}\Big]$$

$$= \frac{m}{2}\cdot\Big[x_b^2\, \omega \frac{\cos\omega t}{\sin\omega t} + x_a^2\, \omega\left(\frac{\cos^3\omega T}{\sin\omega T} + \frac{\sin^2\omega T\cos\omega T}{\sin\omega T}\right) -$$

$$- 2\frac{x_b\, x_a}{\sin\omega T}\, \omega\left(\cos^2\omega T + \sin^2\omega T\right)\Big]$$

$$= \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\Big[\left(x_b^2 + x_a^2\right)\cos\omega T - 2x_b\, x_a\Big]$$

ok

Czyli:

$$G(x_b, t_b, x_a, t_a) = f(t_b - t_a)\, e^{\frac{i m\omega}{2\hbar\sin\omega(t_b - t_a)}\left[\left(x_b^2 + x_a^2\right)\cos\omega(t_b - t_a) - 2x_a x_b\right]}$$

Nieco więcej rachunków wymaga wyliczenie f:

$$f(t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega(t_b - t_a)}}$$

(może przewidzieć jakiegoś Gaussa)

Dla $\omega = 0$:

$$G = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_b - t_a)}}\; e^{\frac{i m (x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}}$$ - cząstka swobodna

ok.

2. Oscylator w 3D

w 3D Zapiszmy nw. ogólne

Dla każdego z modów analogiczne

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_i\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + i\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)$$

$\omega_c = \sqrt{2}(\ldots)$

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3 + \frac{3}{2}\right)$$

$$|\psi(n_1, n_2, n_3)\rangle = \frac{a_1^{\dagger n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{a_2^{\dagger n_2}}{\sqrt{n_2!}} \frac{a_3^{\dagger n_3}}{\sqrt{n_3!}} |0\rangle$$

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right), \quad n_1, n_2, n_3 = 0 \ldots \infty$$

Znajdź degenerację kolejnych poziomów energ.

$E_0 = (0,0,0) \quad \times 1$

$E_1 = (1,0,0), (0,0,1), (0,1,0) \quad \times 3$

$E_2 = (1,1,0), (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,0,1), (0,1,1)$

n-ty poziom – na ile sposobów jako suma 3 liczb naturalnych

n kulek wkłada się na 3 przegródki

$\circ \,|\, \circ \; \circ \; \circ \; \circ \,|\, \circ \; \circ$

$\binom{n+2}{2}$ ok.