Cwiczenia 20

12 maja 2014
13:58

1. Dodawanie momentów pędu

$\vec{J}_1, \vec{J}_2$ momenty pędu dwóch cząstek
(albo moment pędu i spin, 2 spiny..)

$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ - stany własne
$J_1^2, J_{1,z}, J_2^2, J_{2,z}$

chcemy znaleźć stany własne całkowitego momentu pędu: $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, $|j, m\rangle$

$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)$, $J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$

$$\begin{cases} J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle \\ \end{cases}$$

sprawdźmy:

- $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = \frac{1}{2}\left(J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+}\right) + J_{1z} J_{2z}$

$\parallel$

$\frac{1}{2}\left[(J_{1x} + iJ_{1y})(J_{2x} - iJ_{2y}) + (J_{1x} - iJ_{1y})(J_{2x} + iJ_{2y})\right] + ..$

$= \frac{1}{2}\left[2J_{1x} J_{2x} + 2 J_{1y} J_{2y}\right] + J_{1z} J_{2z} = \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$

- $(\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$

Szukamy st. własnych:

- $|j, j\rangle = |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$

$J_z |j, j\rangle = (J_{z1} + J_{z2})(|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle) =$

$= \hbar(j_1 + j_2)\, |j, j\rangle = \hbar j\, |j, j\rangle$ OK

$$= \hbar (j_1 + j_2) |j, j\rangle = \hbar j |j, j\rangle \quad \text{ok}$$

$$\vec{J}^2 |j, j\rangle = \hbar^2 \left[(j_1+1) j_1 + j_2 (j_2+1) + 2 j_1 j_2 \right] |j, j\rangle$$

$$= \hbar^2 (j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1) |j, j\rangle = \hbar^2 j (j+1) |j, j\rangle$$

ok

- $$J_- |j, j\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - j(j-1)} \, |j, j-1\rangle$$

$$|j, j-1\rangle = \frac{J_- |j, j\rangle}{\hbar \sqrt{2j}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2j}} \cdot (J_{1-} + J_{2-}) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2j}} \Big(\sqrt{j_1(j_1+1) - j_1(j_1-1)} \, |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle$$

$$+ \sqrt{j_2(j_2+1) - j_2(j_2-1)} \, |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle \Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2j}} \left(\sqrt{2j_1} \, |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2} \, |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle \right)$$

$$J^2 |j, j-1\rangle = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2j}} \Big(|j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle \cdot$$

$$\cdot \big(\sqrt{2j_1} \cdot (j_1 (j_1+1) + j_2 (j_2+1) + 2 j_2 (j_1-1) \big) +$$

$$+ \sqrt{2j_2} \sqrt{2j_1 \cdot 2j_2} \Big) + \ldots$$

$$= \hbar^2 j (j+1) \, |j, j-1\rangle$$

wekt. stan ortogonalny do $|j, j-1\rangle$

$$|j, j-1\rangle^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2j}} \left(\sqrt{2j_2} \, |j_1-1\rangle |j_2\rangle - \sqrt{2j_1} \, |j_1, j_2-1\rangle \right)$$

$$\vec{J}^2 |j, j-1\rangle^{\perp} = \hbar^2 \sqrt{\frac{j_2}{j}} \left[j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2(j_1-1) j_2 \right] |j_1-1\rangle |j_2\rangle$$

$$+ \hbar^2 \sqrt{\frac{j_2}{j}} \sqrt{2j_1} \sqrt{2j_2} \, |j_1, j_2-1\rangle$$

$$- \sqrt{\frac{j_1}{j}} \left[j_1 (j_1+1) + j_2 (j_2+1) - 2(j_2-1) j_1 \right] |j_1\rangle |j_2-1\rangle$$

$$- \sqrt{\frac{j_1}{j}} \sqrt{2j_1 \, 2j_2} \, |j_1-1, j_2\rangle \Big)$$

$$- \sqrt{\frac{\cdot}{j}}\, |2j_1\, 2j_2 \quad |j_1 - 1, j^2 \rangle \quad /$$

$$= \hbar^2 \sqrt{\frac{j_2}{j}}\, |j_1 - 1\rangle |j_2\rangle \left(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2(j_1-1) j_2 - 2 j_1 \right)$$

$$- \hbar^2 \sqrt{\frac{j_1}{j}}\, |j_1\rangle |j_2 - 1\rangle \left(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2(j_2-1) j_1 - 2 j_2 \right)$$

$$\left\{ (j_1 + j_2 - 1)(j_1 + j_2) = j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) - 2(j_1+j_2) + 2 j_1 j_2 \right.$$

ok

$$\hbar^2 (j-1) j \quad |j, j-1\rangle^+$$

czyli:

$$|j, j-1\rangle^+ = |j-1, j-1\rangle$$

2. Przykład dwa spiny $\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |+\tfrac{1}{2}\rangle |+\tfrac{1}{2}\rangle \\ |1, 0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(|-\tfrac{1}{2}\rangle |+\tfrac{1}{2}\rangle + |+\tfrac{1}{2}\rangle |-\tfrac{1}{2}\rangle \right) \\ |1, -1\rangle &= |-\tfrac{1}{2}\rangle |-\tfrac{1}{2}\rangle \end{aligned}\right\} \text{tryplet}$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-\tfrac{1}{2}\rangle_z |\tfrac{1}{2}\rangle_z - |+\tfrac{1}{2}\rangle_z |-\tfrac{1}{2}\rangle_z \right) \Big\} \text{ singlet}$$

Sprawdzić że stan singletowy jest niezmienniczy względem obrotów tzn, że.

$$|0, 0\rangle_z = |0, 0\rangle_{\vec{n}}$$ gdzie $\vec{n}$ dowolny kierunek w przestrzeni

$$|0, 0\rangle_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-\tfrac{1}{2}\rangle_{\vec{n}} |+\tfrac{1}{2}\rangle_{\vec{n}} - |+\tfrac{1}{2}\rangle_{\vec{n}} |-\tfrac{1}{2}\rangle_{\vec{n}} \right)$$

$$|+\tfrac{1}{2}\rangle_{\vec{n}} = \alpha |+\tfrac{1}{2}\rangle - \beta^* |-\tfrac{1}{2}\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|-\tfrac{1}{2}\rangle_{\vec{n}} = \beta |+\tfrac{1}{2}\rangle + \alpha^* |-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|0, 0\rangle_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Big((\beta |+\rangle + \alpha^* |-\rangle)(\alpha |+\rangle - \beta^* |-\rangle)$$
$$- (\alpha |+\rangle - \beta^* |-\rangle)(\beta |+\rangle + \alpha^* |-\rangle) \Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(|+\rangle |-\rangle - |-\rangle |+\rangle \right)$$ ok

tzn że mamy dwa wektory w tych samych bazach

$= \frac{1}{\sqrt{2}}($

tzn. że mierząc dwa wyniki w tym samym bazach mamy zawsze doskonałe antykorelacje

$|\psi_-\rangle := |0,0\rangle$ stan singletowy

uprawniony wniosek mówiąc o korelacji spinów np. w bazie z:

$$\langle\psi_-|\sigma_z\otimes\sigma_z|\psi_-\rangle =$$

$$\langle\psi_-|\; |+\rangle\langle+|\otimes|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\otimes|-\rangle\langle-| + |+\rangle\langle+|\otimes|-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle-|\otimes|+\rangle\langle+| \;|\psi_-\rangle$$

+1 jeśli skorelowane, −1 jeśli nie skorelowane

Sprawdźmy:

$$\langle\psi_-|\hat\sigma_{\vec n}\otimes\hat\sigma_{\vec n}|\psi_-\rangle = -1$$

$$\hat\sigma_{\vec n} = \hat\sigma_x n_x + \hat\sigma_y n_y + \hat\sigma_z n_z$$

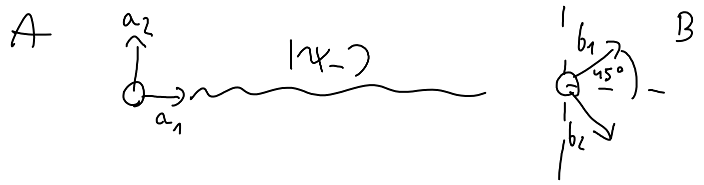
Zróbmy od razu coś ogólniejszego co się przyda

$$\langle\psi_-|\vec\sigma_{n_1}\otimes\vec\sigma_{n_2}|\psi_-\rangle =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\langle\psi_-|\sigma_x\otimes\sigma_x|\psi_-\rangle = -1\\
\langle\psi_-|\sigma_y\otimes\sigma_y|\psi_-\rangle = -1\\
\langle\psi_-|\sigma_z\otimes\sigma_z|\psi_-\rangle = -1\\
\langle\psi_-|\sigma_x\otimes\sigma_y|\psi_-\rangle = \langle\psi_-|\frac{1}{\sqrt2}\left(i|-\rangle|+\rangle + i|+\rangle|-\rangle\right) = 0\\
\vdots\\
\quad = 0
\end{array}\right.$$

$$= -\vec n_1\cdot\vec n_2$$

Rozważmy następujący eksperyment



A mierzy spin albo w kierunku $\vec a_1$ albo $\vec a_2$

B albo $\vec b_1$ albo $\vec b_2$

Następnie analizują następującą funkcję

Następnie analizują następującą funkcję

$$C = \langle \hat{\sigma}_{\vec{a}_1} \otimes \hat{\sigma}_{b_1} \rangle + \langle \hat{\sigma}_{a_1} \otimes \hat{\sigma}_{b_2} \rangle +$$
$$+ \langle \hat{\sigma}_{\vec{a}_2} \otimes \sigma_{b_1} \rangle - \langle \sigma_{\vec{a}_2} \otimes \hat{\sigma}_{b_2} \rangle = 2\sqrt{2}$$

6. Ujrzymy fakt dla zrozumienia podstaw mechaniki kwantowej

W roku 1935 EPR napisali pracę

„Can QM be considered complete"

teoria kompletna powinna opisywać wszystkie „realności fizyczne".

„Jeśli w pewnej sytuacji można przewidzieć wartość wielkości fizycznej bez zaburzania stanu układu, tzn że istnieje odpowiadająca tej wielkości realność fizyczna"

następnie rozważyli funkcję dwóch cząstek

$$\psi(x_1, x_2) \sim \delta(x_1 + x_2)$$

zauważmy że w repr. pędowej

$$\psi(p_1, p_2) \sim \int e^{\frac{i p_1 x_1}{\hbar}} e^{\frac{i p_2 x_2}{\hbar}} (\ldots - x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int e^{\frac{i(p_1 - p_2)x}{\hbar}} dx \sim \delta(p_1 - p_2)$$

jeśli zmierzę cząstkę 1 w miejscu $x_1 = \bar{x}$ to wiem że $x_2 = -\bar{x}$. Ale jeśli cząstki były odległe to położenie tamtej cząstki nie mogło się zmienić czyli już wcześniej było ustalone jako $-\bar{x}$.

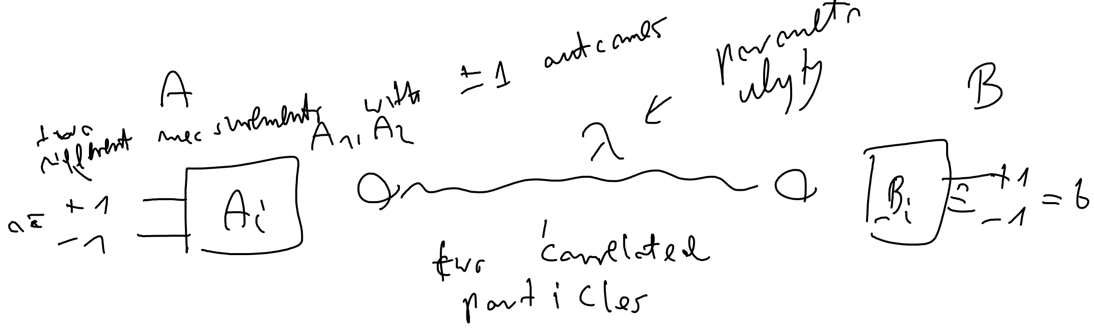
Podobnie mierząc pęd $p_1 = \bar{p} \Rightarrow \bar{p_2} = \bar{p}$

Wniosek. Cząstka 2 miała dobrze określone zarówno pęd jak i położenie — opis w ramach QM niekompletny.

Teorie parametrów ukrytych (Bohm)

istnieją parametry determinujące wyniki konkretnych pomiarów – w teorii kwantowej nie ma fundamentalnej przypadkowości.

Nierówności Bella (1966)



A, and B each randomly chooses to perform one of two measurements.

We assume that there is some parameter λ that determines how particles will behave in the particular measurement

$$a_i = a(A_i, \lambda) = \pm 1 \quad b_i = b(B_i, \lambda) = \pm 1$$

correlations in measurement of A and B are due classical correlation imprinted during preparation

Consider a quantity:

$$C = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_2 b_2 =$$

$$= a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 - b_2)$$

for every combination of ± 1 $\quad |C| \leq 2$

$$\langle C \rangle = \langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_1 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_2 b_2 \rangle$$

$$\langle C \rangle = \int d\lambda\, \rho(\lambda) \Big(a(A_1, \lambda)\, b(B_1, \lambda) + a(A_1, \lambda)\, b(B_2, \lambda)$$
$$+ a(A_2, \lambda)\, b(B_1, \lambda) - a(A_2, \lambda)\, b(B_2, \lambda) \Big)$$

$$|\langle C \rangle| \leq 2$$

what are the assumptions:

– reality (measurements just reveal preexisting quantities $a(A_i, \lambda)$, $b(B_i, \lambda)$

– locality (measurements of A does not in depend and measurement of B)
without locality we could have $a_i = a(A_i, B_j, \lambda)$

a wiemy że dla $|\Psi^-\rangle$ i pomiarów spinów mamy $C = 2\sqrt{2}$. Czyli cząstki nie mają „ustalonego" spinu przed pomiarem, chyba że dopuścimy działanie na odległość.

$$\begin{cases} \text{oczywiście } -1 \leq a \leq 1 \\ \left| \int \rho(\lambda)\, A_1 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_1 - A_2 B_2 \right| = \\ = \left| \int \rho(\lambda)\, A_1 (B_1 + B_2) + A_2 (B_1 - B_2) \right| \end{cases}$$

$$\leq \int d\lambda\, \rho(\lambda) |B_1 + B_2| + |B_1 - B_2|$$