Cwiczenia 24

2 czerwca 2014
22:28

Macierz gęstości - stany mieszane

$|\psi\rangle$ - stan czysty (pełna wiedza)

$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ macierz gęstości

nie pełna wiedza stan $|\psi_i\rangle$ z prawdopodobieństwem p_i

$$\langle A\rangle_\rho = Tr(A\rho) = \sum_i p_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \sum_i p_i \langle A\rangle_{\psi_i}$$

Przykład 1

a) spin $\frac{1}{2}$ z $p=\frac{1}{2}$ w stanie $|+\frac{1}{2}\rangle_z$, $|-\frac{1}{2}\rangle_z$

b) ~ $p=\frac{1}{2}$ w stanie $|+\frac{1}{2}\rangle_x$, $|-\frac{1}{2}\rangle_x$

$\rho_a = \rho_b = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ dwa przypadki nie rozróżnialne.

Przykład 2

a gdyby mieć po dwie kopie:

$$\frac{1}{2}\left(|+\rangle_z\langle+| \otimes |+\rangle_z\langle+| + |-\rangle_z\langle-| \otimes |-\rangle_z\langle-|\right) \neq$$

$$\neq \frac{1}{2}\left(|+\rangle_x\langle+| \otimes |+\rangle_x\langle+| + |-\rangle_x\langle-| \otimes |-\rangle_x\langle-|\right)$$

Klasycznie oczywiście a) i b) są rozróżnialne...

Zredukowana macierz gęstości

W poprzednim przykładzie - macierz gęstości reprezentuje zespół stanów czystych.

ale może też opisywać stan podukładu

Rozważmy stan ρ_{AB} dwóch podukładów

Mamy dostęp tylko do podukładu A:

Mamy dostęp tylko do podukładu A:

$$\mathrm{Tr}\left(A \otimes \mathbb{1}\ \rho_{AB} \right) = \sum_{a,b} \langle \psi_a | \langle \psi_b | A \otimes \mathbb{1}\ \rho_{AB} | \psi_b \rangle | \psi_a \rangle$$

$$= \sum_a \langle \psi_a | A \underbrace{\left(\sum_b \langle \psi_b | \rho_{AB} | \psi_b \rangle \right)}_{\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}} | \psi_a \rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\left(A \rho_A \right)$$

$\uparrow$ zredukowana macierz gęstości

reprezentuje wszystko co możemy dowiedzieć się o podukładzie nie mając dostępu do B

(taki stan mieszany nazywa się czasem mieszaniną niewłaściwą)

<u>Przykład</u> („model dekoherencji")

$$|\psi\rangle_S = s_0 |0\rangle + s_1 |1\rangle \quad , \quad |\psi_E\rangle = |0\rangle$$

wyobraźmy sobie że w wyniku oddziaływania z otoczeniem sprzęga się z drugim podukładem i mamy stan:

$$U |0\rangle_S |0\rangle_E = |0\rangle_S |E_0\rangle_E$$

$$U |1\rangle_S |0\rangle_E = |1\rangle_S |E_1\rangle_E$$

$$|\psi_{SE}\rangle = s_0 |0\rangle |E_0\rangle + s_1 |1\rangle |E_1\rangle$$

gdzie $|E_0\rangle, |E_1\rangle$ pewne stany drugiego podukładu

$$\rho_S = \mathrm{Tr}_E \Big(|s_0|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |E_0\rangle\langle E_0| + |s_1|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes |E_1\rangle\langle E_1|$$

$$+ s_0 s_1^* |0\rangle\langle 1| \otimes |E_0\rangle\langle E_1| + \text{h.c.} \Big)$$

$$= \begin{bmatrix} |s_0|^2, & s_0 s_1^* \langle E_1 | E_0\rangle \\ s_0^* s_1 \langle E_0 | E_1\rangle, & |s_1|^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{a} \quad |\psi_S\rangle\langle\psi_S| = \begin{bmatrix} |s_0|^2 & s_0 s_1^* \\ s_0^* s_1 & |s_1|^2 \end{bmatrix}$$

wyrazy pozadiagonalne tłumione.

jeśli informacja o stanach $|0\rangle$, $|1\rangle$ wyciekła do otoczenia nie mamy zaobserwować koherencji.

Mamy efektywnie ewolucję nieunitarną

$$|\psi_S\rangle\langle\psi_S| \longrightarrow \rho_S$$

Tu szczególnie oddziaływanie wyróżniło pewną bazę $|0\rangle, |1\rangle$. – stany preferowane – odporne na dekoherencję

W sytuacji gdy $\langle E_0 | E_1\rangle = 1$ mamy koherencję mamy pewność myśleć że B zadziałało jak „unitarnie pomiarowe"

np. w eksperymencie z dwoma szczelinami.

Ostatecznie mamy co „regułę superpozycji" – jakie koherencje możemy obserwować

Pointer states

stany odporne na oddziaływanie z otoczeniem

H_{int} – hamiltonian oddziaływania

$$e^{-iH_{int}t} |s_i\rangle |E_0\rangle = |s_i\rangle |E_{0,i}(t)\rangle$$

nie zmienia stanu np.:

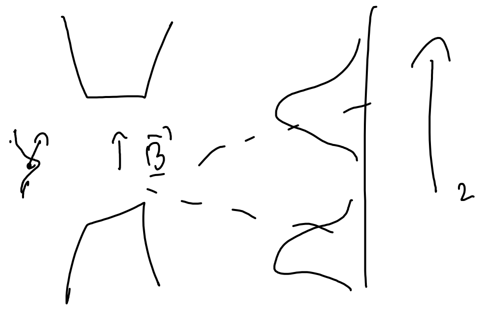
$$\ldots \quad \sigma^{(s)} \otimes \sigma^{(E)}$$

np. $H_{int} = \sigma_z^{(S)} \otimes \sigma_z^{(E)}$

wyróżnione stany to $|\pm\frac{1}{2}\rangle_z$.

A jeśli $H_{int} = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ wyróżnione stany o określonym położeniu — pamięci te są łapane oddziaływaniu, dlatego „położenie" staje się „klasyczne" wielkością których superpozycji są trudne do zobserwowania

Eksperyment Sterna-Gerlacha



niejednorodne pole B

$\vec{B} \approx x z \hat{e}_z$ — ładne div B ≠ 0 czyli muszą być składowe w x i y ale pomijamy

$|\phi\rangle = |s\rangle \otimes |\varphi\rangle$

stan spinowy; stan przestrzenny (tylko kierunek z) dla uproszczenia

$|s\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ stan spinu $\frac{1}{2}$

$|\varphi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \int dz\, e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} |z\rangle$ - stan gaussowski

Oddziaływanie: $H = -\mu\, \vec{\sigma} \circ \vec{B}$

/ moment magnetyczny

Załóżmy że oddziaływanie trwa krótki czas δt:
Stan po oddziaływaniu:

$$|\Phi(\delta t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mu \chi \sigma_z \hat{z}\,\delta t} |s\rangle|\varphi\rangle =$$

δp zmiana pędu

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int dz\, e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \Big(c_+ e^{\frac{i\overbrace{\mu\chi\,\delta t}^{\delta p}}{\hbar} z} |+\rangle|z\rangle + c_- e^{-\frac{i\mu\chi\,\delta t}{\hbar} z} |-\rangle|z\rangle \Big)$$

$$= c_+|+\rangle|\varphi_{+\delta p}\rangle + c_-|-\rangle|\varphi_{-\delta p}\rangle$$

Żeby ocenić poziom odchylenia potrzebujemy:

$$\langle\varphi_{+\delta p}|\varphi_{-\delta p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int dz\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2} - \frac{2i\delta p\, z}{\hbar}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{\pi 2\sigma^2}\, e^{-\frac{4\delta p^2 \sigma^2}{2\hbar^2}} = e^{-\frac{2\delta p^2\sigma^2}{\hbar^2}}$$

$$\left\{ \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} \right.$$

$$= e^{-\frac{\delta p^2}{2\sigma_p^2}}$$

Jeśli zmiana pędu $\delta p \gg \sigma_p$ mamy utratę spójności spinowej $\rightarrow$ efektywnie pomiar

Lokalizacja dzięki rozpraszaniu otoczenia

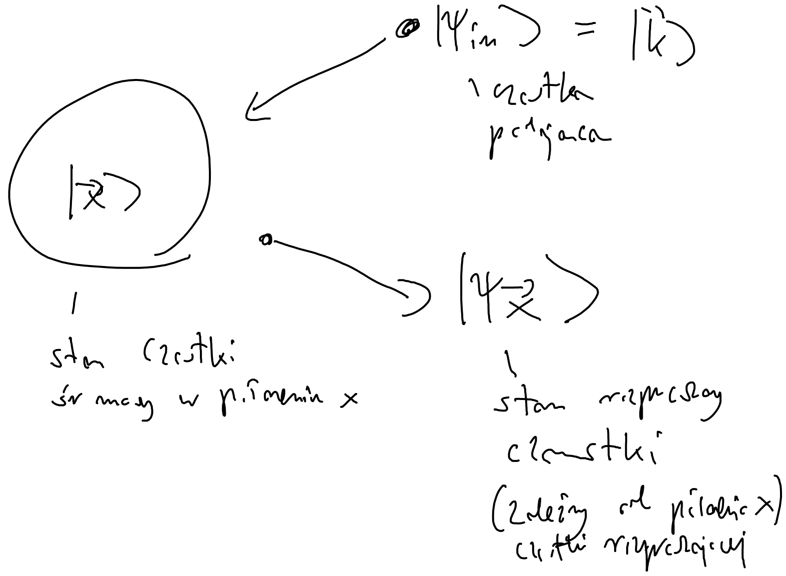
Myśląc o cząstkach swobodnych mamy problem

[illegible]

bo pakiety falowe pomimo się rozpływać b. szybko

$$\Delta^2 x(t) = \Delta^2 x(0)\left[1 + \frac{\hbar^2}{m^2 \Delta x^4(0)}\, t^2\right]$$ dlaczego

nie widzimy tych superpozycji..



Zależność $|\psi_{\vec x}\rangle$ od położenia powoduje że informacja o położeniu wycieka do otoczenia

$\longrightarrow$ dekoherencja superpozycji stanów o różnym położeniu

macierz rozpraszania układu centrum w punkcie x

$$|\vec x\rangle_S\, |e_0\rangle_E \longrightarrow |\vec x\rangle\, S_{\vec x}\, |\psi_{in}\rangle = |\vec x\rangle\, |\psi_{\vec x}\rangle$$

zakładamy że stan centrum rozpraszania się nie zmieni

Załóżmy że w chwili początkowej:

$$\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}| =$$

$$= \int d^3\vec x\, d^3\vec x'\, \rho_S(\vec x, \vec x', 0)\, |\vec x\rangle_S\langle \vec x'| \otimes |\psi_{in}\rangle_E\langle\psi_{in}|$$

$$= \int d\vec{x}\, d\vec{x}'\, \rho_S(\vec{x}, \vec{x}', 0)\, |\vec{x}\rangle_S \langle \vec{x}'| \otimes |\psi_{in}\rangle_E \langle \psi_{in}|$$

$$\xrightarrow{\hat{S}} \rho_{SE}(T) = \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, \rho_S(\vec{x}, \vec{x}', 0)\, |\vec{x}\rangle_S \langle \vec{x}'| \otimes |\psi_{\vec{x}}\rangle \langle \psi_{\vec{x}'}|$$

po długim czasie T:

$$\rho_S(T) = \mathrm{Tr}_E(\rho_{SE}(T)) =$$

$$= \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, \rho(\vec{x}, \vec{x}', 0)\, |\vec{x}\rangle\langle \vec{x}'|\, \langle \psi_{\vec{x}'} | \psi_{\vec{x}}\rangle$$

musimy znaleźć ten element aby znaleźć siłę dekoherencji

W teorii rozpraszania wprowadziliśmy:
amplitudę rozpraszania: $f(\vec{k}, \vec{k}')$

$$|\psi\rangle = \underbrace{(1 + G_0 T)}_{S} |\psi_{in}\rangle$$

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | T | \vec{k}\rangle, \quad |\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

rozważamy przekrój czynny: $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$, (θ, φ) - kąty rozpraszania

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi | p)|^2$$

$$\langle \vec{k}' | \underbrace{G_0 T}_{T'} | k\rangle = \frac{i}{2\pi k} \delta(k' - k)\, f(\vec{k}', \vec{k})$$

$$\hat{S}_{\vec{x}} = e^{-i\frac{\hat{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}\, \hat{S}\, e^{i\frac{\hat{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}$$

I cp. niezmienniczość przesunięcia o $\vec{x}$

$$\langle \psi_{\bar{x}'} | \psi_{\bar{x}} \rangle = \langle \psi_{in} | \hat{S}^{+}_{\bar{x}'} \hat{S}_{\bar{x}} | \psi_{in} \rangle =$$

$$= \langle \psi_{in} | e^{-\frac{i\hat{p}\bar{x}'}{\hbar}} S^{+} e^{\frac{i\hat{p}(\bar{x}'-\bar{x})}{\hbar}} S e^{\frac{i\hat{p}\bar{x}}{\hbar}} | \psi_{in} \rangle$$

Weźmy $|\psi_{in}\rangle = |\vec{k}\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\bar{r}}$

$$= e^{-i\vec{k}\bar{x}'} \langle \vec{k} | S^{+} e^{\frac{i\hat{p}(\bar{x}'-\bar{x})}{\hbar}} S e^{i\bar{k}\bar{x}} | \bar{k} \rangle$$

$$S^{+}S = 1 \qquad S = 1 + G_0 T = \underbrace{1 + T'}_{\text{dla uproszczenia pisania}}$$

$$(1 + T'^{+})(1 + T') = 1$$

$$T'^{+} + T' = -T'^{+}T'$$

$$= e^{i\vec{k}(\bar{x}-\bar{x}')} \langle \bar{k} | (1 + T'^{+}) e^{\frac{i\hat{p}(\bar{x}'-\bar{x})}{\hbar}} (1 + T') | \bar{k} \rangle$$

$$= \langle \bar{k} | \bar{k} \rangle + e^{\frac{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}')}{\hbar}} \langle \bar{p} | T'^{+} e^{\frac{i\bar{p}(\bar{x}'-\bar{x})}{\hbar}} T' | \bar{p} \rangle$$

$$+ \underbrace{\langle \bar{p} | T' + T | \bar{p} \rangle}_{-\langle \bar{p} | T^{+} T' | \bar{p} \rangle}$$

$$\langle \psi_{x'} | \psi_{x} \rangle = \langle \bar{k} | \bar{k} \rangle + \int \left(e^{i(\bar{k}-\bar{k}')(\bar{x}-\bar{x}')} - 1 \right) |\langle \bar{k} | \hat{T} | \bar{k}' \rangle|^2 \, d^3k'$$

. . . . .

$$- F(x-x')t$$

$$\rho(x,x',t) = \rho(x,x',0)\, e^{-F(x-x')t}$$

$$F(x-x') = \int dk\, \rho(k)\, v(k) \int \frac{d\hat{n}\, d\hat{n}'}{4\pi}\left(1 - e^{ik(\hat{n}-\hat{n}')(\bar{x}-\bar{x}')}\right) \cdot |f(k\hat{n}, k\hat{n}')|^2$$

$$\int dk\, \rho(k) = \frac{N}{V}$$ gęstość cząstek

└ gęstość cząstek o danym wekt. falowym.

Przy założeniu że przy jednej cząstce musi [illegible]
$\lambda \gg (x-x')$ rozwijamy $k(\bar{x}-\bar{x}')$

$$F(x-x') \simeq \Lambda\, (x-x')^2$$

$$\Lambda = \int dk\, \rho(k)\, v(k)\, k^2\, \sigma_{eff}(k)$$

└ ef. przekrój czynny

[illegible] σ_{tot}:

$$\rho(x,x',t) = \rho(x,x',0)\, e^{-\Lambda(x-x')^2 t}$$

Obliczmy Λ dla cząsteczek powietrza w temp. pokojowej:

$$\sigma_{eff}(k) \simeq \frac{\pi a^2}{3}$$ a - rozmiar centrum rozpraszania

$$\Lambda \simeq \frac{\pi a^2}{3} \int dk\, \rho(k)\, v(k)\, k^2$$

$$\rho(k) = \frac{N}{V}\, 4\pi k^2 \hbar \left(\frac{1}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2 m k_B T}}$$

rozkład Boltzmanna

$$v(k) = \frac{\hbar k}{m}$$

$$\Lambda = \frac{8}{3\hbar^2}\, \frac{N}{V}\, (2\pi m)^{\frac{1}{2}}\, a^2\, (k_B T)^{\frac{3}{2}}$$

$a = 10^{-5}$ m, masa cząstki powietrza $m \simeq 0{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg

$a = 10^{-5}$ m , masa takiej drobinki pyłku $m \simeq 0{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg

$T = 300\,K$, $\frac{N}{V} = 3 \cdot 10^{25} \frac{\text{cząstek}}{m^3}$

$\Lambda = 10^{31} \frac{1}{m^2 s}$

jeśli $\Delta x^2 = a^2$ $\Lambda \cdot \Delta x^2 = 10^{-31} \frac{1}{s}$

zabijamy koherencję w czasie 10^{-31} s ....

Table 3.2. Estimates of decoherence timescales $\tau_{\Delta x} = \Lambda^{-1}(\Delta x)^{-2}$ (in seconds) for the suppression of spatial interferences over a distance Δx equal to the size a of the object ($\Delta x = a = 10^{-3}$ cm for a dust grain and $\Delta x = a = 10^{-6}$ cm for a large molecule). The timescales were computed using the values for Λ listed in Table 3.1.

Environment	Dust grain	Large molecule
Cosmic background radiation	1	10^{24}
Photons at room temperature	10^{-18}	10^{6}
Best laboratory vacuum	10^{-14}	10^{-2}
Air at normal pressure	10^{-31}	10^{-19}

$$\rho(x, x', t) = \rho(x, x', 0) \exp\{-\Lambda t (x - x')^2\}. \tag{3.63}$$

Here the quantity

$$\Lambda = \frac{k^2 N v \sigma_{\text{eff}}}{V} \tag{3.64}$$

measures the "localization rate". In (3.64) k is the wave number, Nv/V the incoming flux, while σ_{eff} (to be calculated from the S-matrix) is of the order of the total cross section (see App. A1).

There is in general a vast number of scattering processes contributing to the destruction of interference. They will depend on the properties of the interaction of the considered object with its actual surroundings. In Table 3.1 we list some "localization rates" Λ resulting from various scattering processes.

Table 3.1. Localization rate Λ in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ for three sizes of "dust particles" and various types of scattering processes (from Joos and Zeh 1985). This quantity measures how fast interference between different positions disappears as a function of distance in the course of time, see (3.63).

	$a = 10^{-3}$ cm dust particle	$a = 10^{-5}$ cm dust particle	$a = 10^{-6}$ cm large molecule
Cosmic background radiation	10^{6}	10^{-6}	10^{-12}
300 K photons	10^{19}	10^{12}	10^{6}
Sunlight (on earth)	10^{21}	10^{17}	10^{13}
Air molecules	10^{36}	10^{32}	10^{30}
Laboratory vacuum (10^3 particles/cm^3)	10^{23}	10^{19}	10^{17}