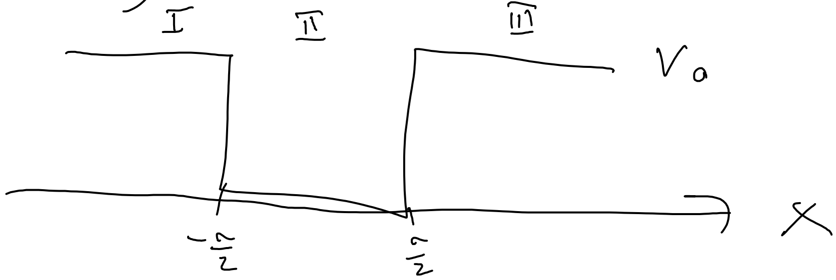
Ćwiczenia 4

25 lutego 2014
21:15

1. Stany własne w skończonej studni potencjału



$0 \le E < V_0$ - stany związane

Potencjał $V(x)$ symetryczny $V(x) = V(-x)$

$\Downarrow$

stany własne symetryczne albo antysymetryczne:

Hamiltonian komutuje z operatorem parzystości $P\,\psi(x) = \pm\psi(-x)$, czyli mają wspólną bazę własną

- stany symetryczne

$$\psi_{I} = A e^{\alpha x} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

odrzucamy rozwiązanie $e^{-\alpha x}$

$$\psi_{II} = B \cos \beta x \qquad \beta = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{III} = A e^{-\alpha x}$$

Warunki zszycia

$$A e^{-\frac{\alpha a}{2}} = B \cos\left(-\beta \frac{a}{2}\right)$$

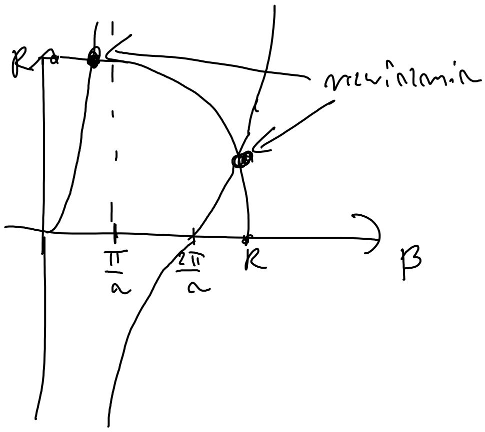
$$\alpha A e^{-\alpha \frac{a}{2}} = -\beta B \sin\left(-\beta \frac{a}{2}\right)$$

$$\alpha = \beta \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - \beta^2}$$

$$\alpha = \beta \operatorname{tg} \frac{\beta a}{2} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - \beta^2}$$

$$\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\beta a}{2}\right) = \sqrt{\underbrace{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}_{R^2} - \beta^2}$$

Rozwiązanie graficzne



Liczba rozwiązań zależna od V_0

Im głębszy potencjał tym więcej rozwiązań

- stany asymetryczne

$$\psi_I = A e^{\alpha x}$$

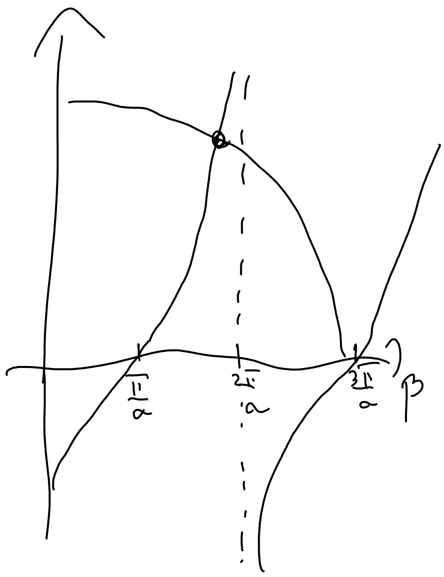
$$\psi_{II} = B \sin \beta x$$

$$\psi_{III} = -A e^{-\alpha x}$$

$$A e^{-\frac{\alpha a}{2}} = B \sin\left(-\frac{\beta a}{2}\right)$$

$$\alpha A e^{-\frac{\alpha a}{2}} = \beta B \cos\left(-\frac{\beta a}{2}\right)$$

$$-\beta \operatorname{ctg} \frac{\beta a}{2} = \alpha = \sqrt{R^2 - \beta^2}$$



Kiedy będzie tylko jedno rozwiązanie:

$$k < \frac{\pi}{a}, \quad \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} < \frac{\pi}{a} \Rightarrow V_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Dopuszczalne energie $E_n = \frac{\hbar^2 \beta_n^2}{2m}$

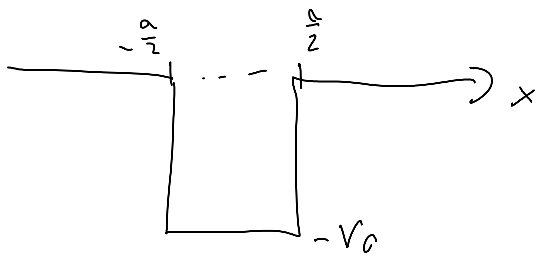
W granicy $V_0 \to \infty$, $k \to \infty$, $\beta_n = \frac{n\pi}{a}$

$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$ – wynik dla ∞ studni. OK

Granica delty Diraca

$V_0 \to \infty$ ale $a \to 0$ t.że $V_0 \cdot a = \lambda = \text{const}$

Wygodniej rozważać: $\quad -V_0 < E < 0$



$$\alpha = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}}$$

Czyli mamy potencjał $V(x) = -\lambda\,\delta(x)$

Będzie tylko jedno rozwiązanie bo

$$\underbrace{V_0 \cdot a}_{\lambda} < \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma} \xrightarrow{a\to 0} \infty$$

Znajdźmy E: (zakładamy że skończone)

$$\beta \,\mathrm{tg}\,\frac{\beta a}{2} = \alpha \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta a = \sqrt{\frac{2m(V_0+E)a^2}{\hbar^2}} \xrightarrow{a\to 0} 0 \\ \mathrm{tg}\,\frac{\beta a}{2} \approx \frac{\beta a}{2} \end{array} \right.$$

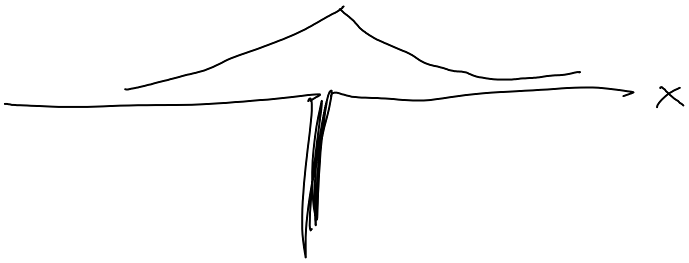
$$\frac{\beta^2 a}{2} = \alpha$$

$$\frac{2m\left(\overset{\lambda}{\widetilde{V_0 a}} + \overset{0}{\widetilde{E a}}\right)}{2\hbar^2} = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\frac{m\lambda}{\hbar^2} = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

Czyli $\alpha = \sqrt{\frac{m^2\lambda^2}{\hbar^4}} = \frac{m\lambda}{\hbar^2}$

Czyli funkcja falowa: $\psi = Ae^{-\frac{m\lambda}{\hbar^2}|x|}$



Zauważmy że nieciągłość pierwszej pochodnej

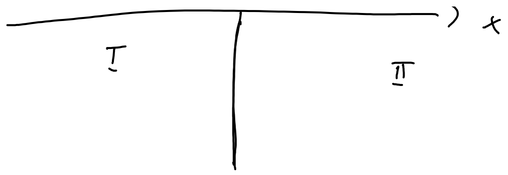
2. Ogólne postępowanie z potencjałami delty Diraca:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda\delta(x-x_0)\psi \quad E\psi \qquad \int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} dx \qquad \varepsilon \to 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}\right) + \lambda\,\psi(x_0) = E\psi(x_0)\underset{0}{\varepsilon}$$

Mamy więc warunek na skok pochodnej

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x_{0+}} - \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x_{0-}} = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(x_0)$$



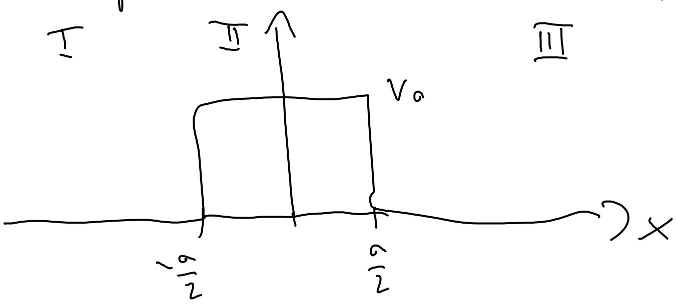
$$\psi_{I} = A e^{+\alpha x}$$

$$\psi_{II} = B e^{-\alpha x} \qquad A = B = \sqrt{\tfrac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha A + \alpha B = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} \cdot A$$

$$\alpha = \frac{m\lambda}{\hbar^2} \qquad E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} \qquad \text{ok.}$$

3. Rozpraszanie na skończonej barierze potencjału



• Rozważmy $E > V_0$

$$\psi_{I} = A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{II} = C e^{i\beta x} + D e^{-i\beta x} \qquad \beta = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{III} = F e^{i\alpha x} + \cancel{G e^{-i\alpha x}}$$

Rozważmy falę padającą z lewej strony ($G=0$)

Warunki zszycia:

$$A e^{-\frac{i\alpha a}{2}} + B e^{\frac{i\alpha a}{2}} = C e^{-i\frac{\beta a}{2}} + D e^{i\frac{\beta a}{2}}$$

$$\begin{cases} i\alpha A e^{-i\alpha\frac{a}{2}} - i\alpha B e^{i\alpha\frac{a}{2}} = i\beta C e^{-i\beta\frac{a}{2}} - i\beta D e^{i\beta\frac{a}{2}} \\ C e^{i\beta\frac{a}{2}} + D e^{-i\beta\frac{a}{2}} = F e^{i\alpha\frac{a}{2}} \\ i\beta C e^{i\beta\frac{a}{2}} - i\beta D e^{-i\beta\frac{a}{2}} = i\alpha F e^{i\alpha\frac{a}{2}} \end{cases}$$

Wszystkie stałe wyrazimy przez A:

Szczególnie interesują nas wielkości

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 \qquad R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$$

współczynnik transmisji　　　współczynnik odbicia

Równoważnie to są stosunki prądów prawdopodobieństwa

$$T = \left|\frac{j_{\text{przechodzący}}}{j_{\text{padający}}}\right|, \qquad j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi^*}{dx}\psi\right)$$

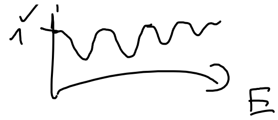
$$j_{\text{przechodzący}} = |F|^2 \alpha, \quad j_{\text{padający}} = |A|^2 \alpha$$

sprawdzimy się że $T + R = 1$

rachunki:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta}\right)^2 \sin^2(\beta a)}$$

$R = 1 - T$.

Czy ma sens: $\alpha = \beta$ (brak bariery) $T = 1$. ok widzimy zachowanie oscylacyjne 

Dla pewnych energii rezonans i transmisja $T=1$

$$\sin(\beta a) = 0 \qquad \beta a = n\pi$$

- Przypadek $0 < E < V_0$

wszystko analogicznie tylko $\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

$$\Psi_{II} = Ce^{-\beta x} + De^{\beta x}$$ wykładnicze funkcje

Wystarczy w wynikach poprzednich zamienić $\beta \to i\beta$

$$\sin ix = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = -\frac{\sinh x}{i} \qquad \sin^2(i\beta a) = -\sinh^2(\beta a)$$

$$T = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2\sinh^2\beta a}$$

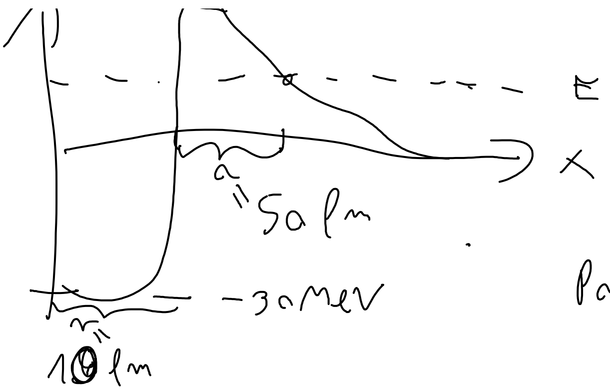
Mamy tunelowanie przez barierę które b. szybko spada ze wzrostem a

Przykład

$${}^{238}U \to {}^{234}Th + \alpha$$ (czas życia

$V \approx 30$ MeV

4,5 mld lat |



$A^{\frac{1}{3}}$ fm

Pamiętajmy robić w 3D ale jedziemy mimo tak:

$$\sinh^2 pa \approx e^{2pa}$$

$$pa \approx \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{10\,fm}^{60\,fm}\sqrt{\frac{30\,MeV\ 10\,fm}{r} - 5\,MeV}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{8\cdot 1{,}6\cdot 10^{-27}}\,2\pi}{6{,}64\cdot 10^{-34}}\cdot 104\cdot\sqrt{1{,}6\cdot 10^{-13}}\cdot 10^{-15}$$

$$\approx 44$$

$$T \approx e^{-88} \approx 10^{-38}$$

Czas życia jądra:

ile razy odbija się cząstka od bariery:

prędkość $\frac{mv^2}{2} \approx 35\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}$

$$v = \sqrt{\frac{70\cdot 10^{-13}\,1{,}6}{\cancel{1{,}6}\cdot 10^{-27}}} = 8\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

ile razy na sekundę: $\frac{8\cdot 10^{7}}{10^{-14}} \approx 10^{21}\,\frac{1}{s}$

prawdop. rozpadu na sekundę $10^{-38}\cdot 10^{21} = 10^{-17}\,\frac{1}{s}$

czas życia $\approx$ 3 mld lat (500 razy za mało...)

(1 rok = $3\cdot 10^{7}$ s)

4. Rozpraszanie na delcie Diraca

$$V(x) = \lambda\,\delta(x)$$

$$\psi_I = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi = Fe^{i\alpha x}$$

$$\psi_{IV} = F e^{i\alpha x}$$

$$\begin{cases} A + B = F \\ i\alpha F - (i\alpha A - i\alpha B) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} F \end{cases}$$

$$i\alpha F - i\alpha(2A - F) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} F$$

$$F\left(2i\alpha - \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right) = 2i\alpha A$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{1 - \frac{m\lambda}{i\alpha\hbar^2}}$$

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{m^2\lambda^2}{\alpha^2\hbar^4}} = \frac{1}{1 + \frac{m\lambda^2 E}{2\hbar^2}}$$

Sprawdźmy czy to to samo co z przejścia granicznego

$V_0 a = \lambda \quad V_0 \to \infty \quad a \to 0$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2 \sinh^2 \beta a} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \beta^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} \end{cases}$$

$\beta a \to 0 \quad \sinh x \simeq x$

$$T \simeq \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}\right) \cdot \frac{a^2}{\alpha^2}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{m^2\lambda^2}{\hbar^4} \frac{\hbar^2}{2mE}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{m\lambda^2}{2E\hbar^2}}$$

ok.