Cwiczenia 7

11 marca 2014
12:03

1. Cząstka w potencjale liniowym $V = -mgx$
(np. grawitacyjny, stałe pole E, stała siła etc..)
wydaje się że to najprostsze co może być
po cząstce swobodnej.
Znajdźmy stany i dopuszczalne energie

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - mgx\right]\psi = E\psi$$

Przechodzimy do reprezentacji pędowej

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\, \psi(x)\, e^{-\frac{ixp}{\hbar}}$$

$$\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi} - mg\, i\hbar \frac{d}{dp}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$$

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dp} = \frac{i\tilde{\psi}}{mg\hbar}\cdot\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$\ln\tilde{\psi} = \frac{i}{mg\hbar}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right) + C$$

$$\tilde{\psi}_E(p) = C\, e^{\frac{i}{mg\hbar}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)}$$

Dozwolone ciągłe spektrum energii
Chcemy, żeby tworzyły bazę „ortonormalną" w sensie

$$\int \tilde{\psi}^*_E(p)\, \tilde{\psi}_{E'}(p)\, dp = \delta(E-E')$$

$$\int \tilde{\psi}^*_E(p)\,\tilde{\psi}_{E'}(p)\,dp = \delta(E-E')$$

$$C^2 \int e^{\frac{ip(E-E')}{mg\hbar}}\,dp = C^2\, 2\pi\, mg\hbar\, \delta(E-E')$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi mg\hbar}}$$

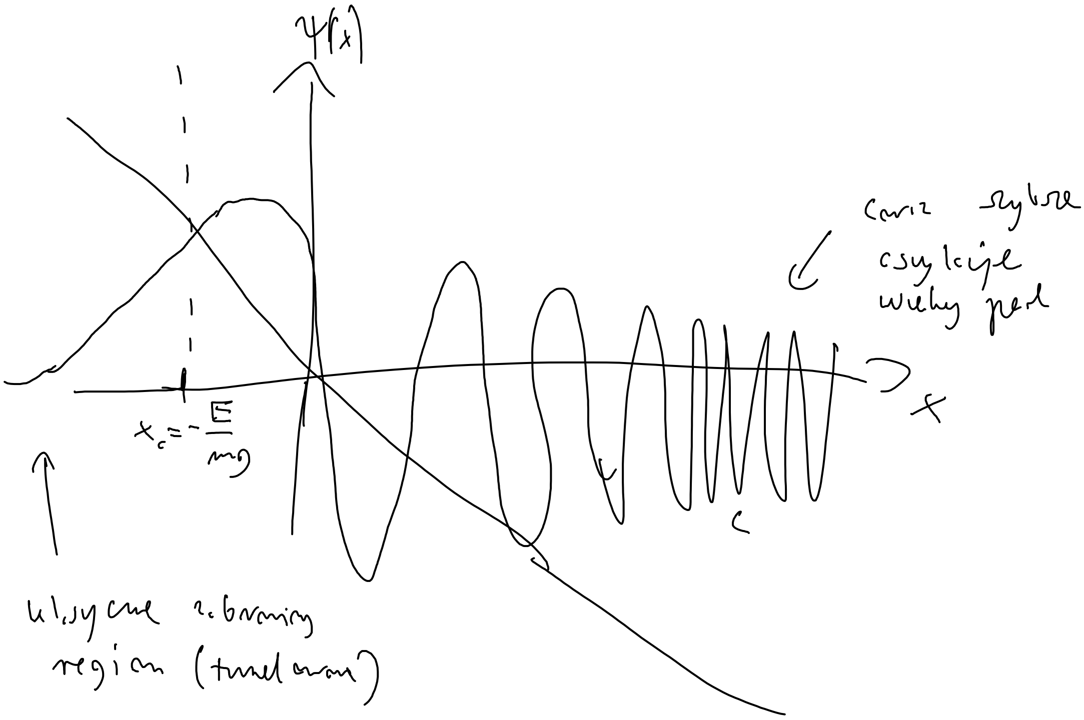
$$\tilde{\psi}_E(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mg\hbar}}\, e^{\frac{i}{mg\hbar}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)}$$

Spełnia też zupełność $\int \psi^*_E(p)\,\psi_E(p') = \delta(p-p')$

$$\psi_E(x) = \frac{1}{2\pi\hbar\sqrt{mg}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ip}{\hbar}\left(x+\frac{E}{mg}\right) - \frac{ip^3}{6m^2g\hbar}}\,dp =$$

energia tylko przesuwa wszystko

$$= \frac{1}{\pi\hbar\sqrt{mg}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{p}{\hbar}\left(x+\frac{E}{mg}\right) - \frac{p^3}{6m^2g\hbar}\right)$$



Rozwiązujemy równanie Airyego:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m^2 g}{\hbar^2}\left(x + \frac{E}{mg}\right)\psi = 0$$

wprowadzamy zmienną:

$$y = -\left(x + \frac{E}{mg}\right)\left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{2m^2 g}{\cancel{\hbar^2}}\right)^{\frac{2}{3}} + y\left(\frac{2m^2 g}{\cancel{\hbar^2}}\right)^{\frac{2}{3}}\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y\psi = 0 \qquad \text{rów. Airy'ego}$$

rozwiązanie f. Airy'ego

$$Ai(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds \cos\left(sy + \frac{s^3}{3}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(sy + \frac{s^3}{3}\right)} ds$$

zachowanie się.

Zachowanie asymptotyczne $Ai(y)$

$$Ai(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{(y)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3}(y)^{\frac{3}{2}}} & y \to \infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}(-y)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) & y \to -\infty \end{cases}$$

Wyprowadzenie zach. asymptotycznego metodą punktu siodłowego

$$I(y) = \int_{C} ds\, e^{i\left(sy + \frac{s^3}{3}\right)} = \int ds\, e^{i\varphi(s)} \quad \text{weźmy} \qquad y < 0$$

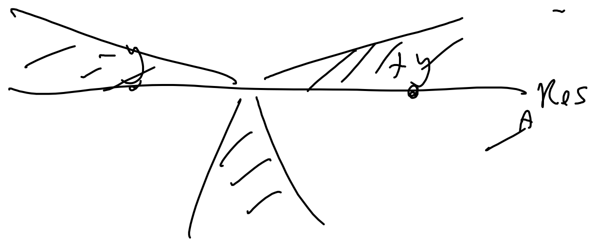
C – contour

po pierwsze deformujemy obszar całkowania tak żeby

$$\mathrm{Re}\left(i\left(re^{i\varphi}y+\frac{1}{3}r^3e^{3i\varphi}\right)\right)\xrightarrow{r\to\infty}<0$$

$$-r\sin\varphi\, y \qquad \frac{1}{3}r^3\sin 3\varphi \qquad\qquad 0\leq 3\varphi\leq\pi$$

Ims



w tych obszarach całki zbiegają.

intuicja całka $I(y)$ będzie miała główny wkład od punktów gdzie faza stacjonarna: $\frac{d}{ds}\phi(s) = 0$

$$y + s^2 = 0 \qquad s = \pm\sqrt{-y} = s_\pm$$

Rozwijamy $\phi(s) = \phi(s_+) + (s-s_+)\underset{0}{\phi'(s_+)} + \frac{(s-s_+)^2}{2}\phi''(s_+)$

$$\phi''(s_\pm) = -2s_\pm = \mp 2\sqrt{|y|}, \quad \phi(s_\pm) = \pm\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

$$I(y) = \frac{e^{i\phi(s_-)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{a} e^{i\frac{(s-s_-)^2}{2}\phi''(s_-)}\,ds + e^{i\phi(s_+)}$$

$$+ e^{i\phi(s_+)}\int_{c}^{\infty} e^{i\frac{(s-s_+)^2}{2}\phi''(s_+)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{+i\,\underline{(s-s_-)}^2\sqrt{|y|}} + e^{i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\underline{(s-s_+)}^2\sqrt{|y|}} \right)$$

$$\xi = (s-s_-)y^{\frac{1}{4}} \qquad \xi = (s-s_+)y^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}} e^{-i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{-i}} + c.c\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}\left(e^{-i\left(\frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,y^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{OK}$$

Uwaga: Zrobiliśmy z równ. róż. II-go rzędu

czyli powinniśmy znaleźć 2 niezależne rozwiązania

- transf. Fouriera zgubiła nam jedno

Ogólne podejście:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + y\psi = 0 \qquad \psi(y) = \int_C \tilde\psi(z)\, e^{zy}\, dz$$

kontur całkowania

jeśli $C = i\mathbb{R}$ to transf. Fouriera

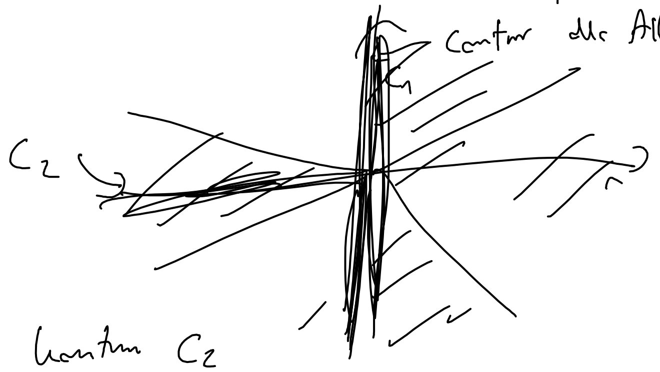
$$\int_C z^2\, \tilde\psi(z)\, e^{zy}\, dz + \underbrace{\int_C y\, \tilde\psi(z)\, e^{zy}\, dz}_{\underbrace{e^{zy}\tilde\psi(z)\big|_C}_{\substack{\text{wybieramy kontur} \\ \text{żeby to było 0}}} - \int \frac{d\tilde\psi}{dz} e^{zy}} = 0$$

$$\int_C \underbrace{\left(z^2\, \tilde\psi(z) - \frac{d\psi}{dz}\right)}_{=0} e^{zy} = 0$$

$$\tilde\psi(z) = C\, e^{\frac{z^3}{3}}$$

Chcemy aby $\quad e^{+zy + \frac{z^3}{3}}\Big|_C = 0$

$\mathrm{Re}\, z^3 \geq 0$ $\cos 3\varphi \leq 0$ | $\frac{3\pi}{2} \leq 3\varphi \leq -\frac{\pi}{2}$



$$\Psi_{C_1} = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{isy - \frac{is^3}{3}}$$

z konturu C_2

$$\Psi_{C_2}(y) = C_2\left(\int_0^\infty e^{-\frac{iz^3}{3} + izy} + \int_0^\infty e^{-\frac{z^3}{3} + zy}\right)$$

z kombinacji liniowej Ψ_{C_1} i Ψ_{C_2} mamy

$$Bi(y) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty ds\, e^{-\frac{s^3}{3} + sy} + \sin\left(\frac{s^3}{3} - sy\right)\right)$$

Zachowanie asymptotyczne:

$$Bi(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}\, y^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}} & y \to +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}(-y)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) & y \to -\infty \end{cases}$$

To się przyda do WKB