Mechanika Kwantowa R 2013/2014, Seria 1

Zadanie 1 Udowodnij, że transformata Fouriera zachowuje iloczyn skalarny funkcji, czyli że:

$$\int \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\phi(x) = \int \mathrm{d}p\, \tilde{\psi}^*(p)\tilde{\phi}(p), \quad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x e^{-ipx/\hbar}\psi(x).$$

Zadanie 2 Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że stany Gaussowskie wysycają zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Analizując wyprowadzenie zasady nieoznaczoności udowodnij, że są to jedyne stany dla których zasada nieoznaczoności jest wysycana.

Zadanie 3 Rozważ cząstkę umieszczoną w nieskończonej studni potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} - a \leq x \leq a \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \tag{1}$$

przygotowaną w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi(x) = \begin{cases} A(x+a)(a-x) & \text{dla } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{w pozostałcyh przypadkach} \end{cases}. \tag{2}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Oblicz $\Delta^2 x$, $\Delta^2 p$ i sprawdź spełnienie zasady nieoznaczoności Heisenberga

c) Na cząstce dokonano pomiaru energii. Jakie wartości pomiaru energii są możliwe i jakie są odpowiadające im prawdopodobieństwa

d) Oblicz wartość oczekiwaną energii korzystając z wyniku poprzedniego podpunktu. Wyznacz również wartość oczekiwaną energii niezależnie licząc $\langle\psi|H|\psi\rangle$. Jak bardzo wartość oczekiwana różni się od energii stanu podstawowego?

Zadanie 4 Cząstka o masie m znajduje sie w nieskończonej jednowymiarowej studni potencjału rozciągającej sie od 0 do a. Wiadomo, ze w chwili $t = 0$ cząstka znajdowała się w stanie podstawowym.Nagle szerokość studni została podwojona (z a do $2a$) tak, że w momencie poszerzania studni funkcja falowa cząstki nie zmieniła się.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo zmierzenia cząstki w pierwszym stanie wzbudzonym nowej studni?

b) Napisz wyrażenie na funkcję falową cząstki po czasie t od momentu poszerzenia studni $\psi(x,t)$

c) Oblicz średnią energię cząstki przed i po podwojeniu szerokości studni.

Zadanie 5 Zapisz w reprezentacji pędowej stany o określonej energii cząstki o masie m umieszczonej w nieskończonej studni potencjału o szerokości a. Dla n-go stanu własnego zapisz wyrażenie na gęstość prawdopodobieństwa pędu cząstki.

Zadanie 6 Rozważ gausowską funkcję falową w jednym wymiarze:

$$|\psi\rangle(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta^2 x} + \frac{\mathrm{i}\langle p\rangle x}{\hbar}\right) \tag{3}$$

a) Wyznacz wartość stałej normalizacyjnej A

b) Napisz i zinterpretuj wyrażenie na prąd prawdopodobieństwa

Zadanie 7 Znajdź stany własne i poziomy energetyczne w nieskończonej studni potencjału o szerokości a w środku której dodatkowo znajduje się potencjał typu delty Diraca:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\delta(x) & \text{dla} - a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \tag{4}$$

Przedyskutuj wynik w zależności o znaku parametru λ.

Zadanie 8 Wyznacz współczynnik transmisji i odbicia fali płaskiej przy rozpraszaniu na potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{dla } x < 0 \\ -V_1 & \text{dla } 0 < x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases} \tag{5}$$

Zadanie 9 Na ćwiczeniach analizowaliśmy problem "zmienniczości" równania Schroedingera pod wpływem transformacji Galileusza. Pokazaliśmy, że aby równanie Schroedingera pozostało niezmiennicze przy przejściu do układu primowanego poruszającego się z prędkością v względem układu nieprimowanego konieczna jest domnożenie funkcji falowej przez czynnik fazowy postaci:

$$\psi'(x', t') = \psi(x, t) e^{\frac{imv^2 t}{2\hbar} - \frac{imvx}{\hbar}}. \tag{6}$$

Zastanów się teraz nad wariantem relatywistycznym tego problemu. Rozważ równanie Kleina-Gordona:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{7}$$

i zbadaj zachowanie tego równania pod wpływem transformacji Lorentza. Jak powinna transformować się funkcja falowa $\psi(x, t)$ aby równanie pozostało niezmiennicze.

Zadanie 10 Rozważ atom dwupoziomowy, gdzie $|0\rangle$, $|1\rangle$ są stanami o określonej energii wynoszącej odpowiednio E i $2E$. Niech stan atomu w chwili początkowej będzie postaci: $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

a) Znajdź postać stanu w chwili t

b) Po czasie t dokonano pomiaru cząstki, w którym rzutowano stan cząstki na stan początkowy $|\psi(0)\rangle$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że istotnie zmierzono stan $|\psi(0)\rangle$. Oznacza to, że w tym przypadku cząstka w wyniku pomiaru powróciła do stanu początkowego

c) Wyobraź sobie teraz sytuację, że powyższy pomiar wykonywano k razy po sobie w odstępach czasu t/k. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka po każdym z k pomiarów wciąż pozostawała w stanie $|\psi(0)\rangle$

d) Rozważ granicę $k \to \infty$ i zinterpretuj wynik. Zaobserwowany przez Ciebie efekt nazywany jest kwantowym efektem Zenona. Zastanów się skąd taka nazwa i jaki to ma związek ze słynnymi paradoksami starożytnego Zenona z Elei...

Zadanie 11 Operator momentu pędu dany jest przez:

$$\hat{L}_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i \hat{p}_j$$

gdzie $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$ są operatorami położenia i pędu dla kierunku i, przy czym $[x_i, p_j] = \delta_{ij} \mathrm{i}\hbar$, a ϵ_{ijk} jest tensorem całkowicie antysymetrycznym. Udowodnij, że:

$$[\hat{L}_k, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar \sum_l \epsilon_{kjl} \hat{L}_l$$

Zadanie 12 Dla Hamilonianu trójwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego sprawdź, że $[\bar{L}_i, H] = 0$. Uargumentuj, że dowodzi to zachowania momentu pędu w tym przypadku.