Mechanika Kwantowa R 2013/2014, Seria 2

Zadanie 1 Cząstka o masie m znajduje się w nieskończonej dwuwymiarowej studni potencjału

$$V(x,y) = V_x(x) + V_y(y),$$

gdzie

$$V_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < x < a \\ +\infty & \text{dla pozostałych } x \end{cases} \qquad V_y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < y < a \\ +\infty & \text{dla pozostałych } y \end{cases}.$$

W obszarze w którym potencjał jest zero stan cząstki w chwili początkowej opisywany był przez funkcję:

$$\psi(x,y,t=0) = A\sin^3(\pi x/a)\sin^5(\pi y/b).$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź wartość oczekiwaną energii, położenia i pędu w chwili $t = 0$

c) Zapisz funkcję falową cząstki po czasie t i znajdź wartości oczekiwane energii położenia i pędu w chwili t

Zadanie 2 Cząstka o masie m porusza się w płaszczyźnie xy w polu siły o potencjale:

$$V(x,y) = \frac{k_1}{2}(x^2+y^2) + \frac{k_2}{2}(x-y)^2,$$

gdzie k_1, k_2 są pewnymi stałymi dodatnimi. Znaleźć widmo energii cząstki i wypisać postać funkcji własnych odpowiadających poszczególnym energiom. Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 w widmie pojawi się degeneracja.

Zadanie 3 Stan początkowy cząstki o masie m w potencjale oscylatora harmonicznego o częstotliwości własnej ω jest dany przez:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n-1\rangle - |n\rangle\right).$$

a) Po jakim czasie t stan ten przeewoluuje do stanu $|\psi(t)\rangle$, ortogonalnego do $|\psi(0)\rangle$?

b) Znaleźć wartości oczekiwane operatorów $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w stanie $|\psi(t)\rangle$.

Zadanie 4 Korzystając z faktu, że n-ty stan wzbudzony oscylatora harmonicznego związany jest z $n-1$-szym relacją:

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}}|n-1\rangle$$

oraz znając funkcję falową stanu podstawowego w reprezentacji położeniowej:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2 m\omega/\hbar}$$

napisz

a) Funkcję falową $\psi_2(x)$ drugiego stanu wzbudzonego w reprezentacji położeniowej

b) Tę samą funkcję falową w reprezentacji pędowej. Czy możesz sformułować ogólną obserwację dotyczącą reprezentacji położeniowej i pędowej stanów własnych oscylatora harmonicznego.

Zadanie 5 Podaj przykładowy rozkład stanów własnych oscylatora harmonicznego $|n\rangle$ jako superpozycję stanów koherentnych $|z\rangle$.

Zadanie 6 Udowodnij, ze stan koherenty można zapisać jako:

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle, \quad \text{gdzie } \hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}$$

jest tzw. operatorem przesunięcia. *Wskazówka.* Skorzystaj z tw. Bakera-Cambella-Haussdorfa.

Zadanie 7 Rozważ stan oscylatora harmonicznego postaci:

$$|\psi(0)\rangle = A(|z\rangle + |-z\rangle),$$

gdzie $z \in \mathbf{C}$ a A jest stałą normalizacyjną. Jest to ciekawy stan, bo dla dużych $|z|$ można myśleć o nim jako o superpozycji kwantowej dwóch różnych „klasycznych” stanów oscylatora harmonicznego—na potrzeby medialne czasem nazywa się go nieco nie precyzyjnie stanem kota Schroedingera.

a) Wyznacz A

b) Oblicz średnie położenie, pęd i średnią energię w tym stanie

c) Oblicz stan oscylatora po czasie t. Po jakim czasie powróci on do stanu początkowego?

Zadanie 8 Na ćwiczeniach korzystając z metody całek po trajektoriach pokazaliśmy, że funkcja Greena dla oscylatora harmonicznego ma postać:

$$G(x', x, t) = f(t) e^{\frac{im\omega}{2\hbar \sin\omega t}[(x'^2 + x^2)\cos\omega t - 2x'x]}.$$

Wyznacz postać funkcji $f(t)$ używając powyższej postaci funkcji Greena w celu obliczenia ewolucji wybranego stanu oscylatora harmonicznego a następnie nałożenie warunku na unormowanie funkcji falowej.

Zadanie 9 Cząstka o masie m poruszająca się z zerowym całkowitym momentem pędu jest uwięziona pomiędzy dwoma nieprzenikliwymi sferami o promieniach a i b, czyli:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } r < a \\ 0 & \text{dla } a < r < b \\ +\infty & \text{dla } r > b \end{cases}.$$

a) Znajdź poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe.

b) Dla stanu o najniższej energii, znajdź średnie położenie cząstki od centrum potencjału oraz odległość najbardziej prawdopodobną

Zadanie 10 Znajdź stany związane o momencie pędu $l = 0$ w potencjale „bańki mydlanej"

$$V(r) = -\lambda\delta(r - R),$$

gdzie $\lambda > 0$. Czy stany związane zawsze istnieją?

Zadanie 11 Rozważ funkcję falową:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A \sin\theta \cos\varphi e^{-\alpha r}.$$

a) Znajdź stałą normalizacyjną A

b) Zapisz stan cząstki poprzez rozkład na harmoniki sferyczne $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$

c) Dokonując na cząstce jednoczesnego pomiaru $\hat{L}^2$ i L_z, jakie wyniki pomiaru i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać

Zadanie 12 Rozważ stan cząstki o momencie pędu $l = 1$, który w standardowej bazie $|l, m\rangle$ ma postać

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Jakie wartości i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać mierząc y-kową składową momentu L_y.

Zadanie 13 Rozważ stan własny operatorów $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$, $|l, m\rangle$. Oblicz wartość oczekiwaną i dyspersję operatora rzutu momentu pędu na kierunek $\vec{n} = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0)$ w stanie $|l, m\rangle$.

Zadanie 14 W chwili $t = 0$ atom wodoru znajduje się w stanie:

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \frac{4}{(2a)^{3/2}} \left[e^{-\frac{r}{a}} Y_{0,0} + A\frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \left(-iY_{1,1} + Y_{1,-1} + \sqrt{7} Y_{1,0} \right) \right]$$

gdzie a jest promieniem Bohra.

a) Oblicz stałą normalizacyjna A

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru $\hat{L}^2$ otrzymamy wartość $\hbar^2 l(l + 1)$, gdzie $l = 0, 1, 2$

c) Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $\rho(r)$, że elektron znajdziemy w odległości r od jądra.

d) Dla jakiej wartości r, $\rho(r)$ ma maksimum?

e) Zapisz postać funkcji falowej w chwili t.

f) Zapisz unormowany stan cząstki w chwili t na której wykonano pomiar L_z dający wynik $\hbar$.

Zadanie 15 Cząstka znajduje się w stanie kwantowym opisanym następująca funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-r/a} \left(\frac{z}{r} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \right)$$

Znajdź rozkład prawdopodobieństwa pomiaru $P(l, m)$, gdzie l, m są liczbami kwantowymi całkowitego momentu pędu oraz jego rzutu na oś z.

Zadanie 16 Rozważ cząstkę w stanie opisanym funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = A e^{-r/a} e^{2i\varphi}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź prawdopodobieństwa $P(l, m)$ zmierzenia wartości liczb kwantowych l, m.

Wskazówka: Aby uzyskać ogólny wzór, skorzystaj z funkcji tworzącej wielomianów Legendra.

Zadanie 17 Rozważ potencjał periodyczny postaci:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda \delta(x - na),$$

gdzie $\lambda < 0$ (na ćwiczeniach rozważaliśmy przypadek $\lambda > 0$). Przyjmując periodyczne warunki brzegowe wyznacz warunek na pasma energetyczne w tym potencjale. Czy zawsze istnieją stany związane. Czy tak jak w przypadku $\lambda > 0$ mamy wiele pasm?