Mechanika Kwantowa R 2013/2014, Seria 3

Zadanie 1 Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w polu siły o potencjale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^4$.

a) Znajdź poprawkę do energii stanu podstawowego w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń traktując człon αx^4 jako małe zaburzenie.

b) Postaraj się poprawić ten wynik (zbliżyć się do prawdziwej wartości) stosując metodę wariacyjną wykorzystując funkcję próbną postaci: $\psi_\lambda(x) = \mathcal{N}_\lambda e^{-\lambda x^2}$, gdzie λ jest parametrem wariacyjnym

c) Jak należałoby podejść to tego problemu stosując metodę WKB. Jeśli nie uda Ci się rozwiązać warunku WKB analitycznie postaraj się rozwiązać go numerycznie. Porównaj uzyskany wynik z wynikami uzyskanymi w ramach poprzednich podpunktów.

Zadanie 2 Rozważ cząstkę poruszającą się w potencjale $V(x) = F|x|$ i znajdź dopuszczalne energie stosując:

a) metodę wariacyjną wykorzystując klasę funkcji próbnych $\exp(-\alpha|x|)$ gdzie α jest parametrem wariacyjnym.

b) przybliżenie WKB

c) ściśle korzystając z własności funkcji Airy'ego

Zadanie 3 Stosując metodę wariacyjną w klasie funkcji próbnych

$$\psi_\alpha(\vec{r}) = \begin{cases} 1 - \frac{|\vec{r}|}{\alpha} & \text{dla} |\vec{r}| \leq \alpha \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \tag{1}$$

gdzie α jest parametrem wariacyjnym znajdź najlepsze oszacowanie energii stanu podstawowego atomu wodoru.

Zadanie 4 Cząstka o masie m znajduje się w potencjalne dwuwymiarowej studni:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a \\ +\infty & \text{pozostałe } x \text{ i } y \end{cases}$$

zaburzonej przez

$$V'(x,y) = \begin{cases} V_0 \cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a) & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{pozostałe } x \text{ i } y \end{cases}$$

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń wyznacz poprawki do energii w stanie podstawowym i pierwszym w zbudzonym.

Zadanie 5 Cząstka o masie m znajdująca się w stanie podstawowym trójwymiarowego, izotropowego oscylatora harmonicznego o częstości ω począwszy od chwili $t = 0$ jest poddana potencjałowi zaburzającemu $V'(t) = ax\cos(\omega' t)$. Oszacuj w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo w chwili t znalezienia cząstki w stanie innym niż stan podstawowy.

Zadanie 6 Znajdź energie własne i odpowiadające im stany spinowe dla układu proton-antyproton. Przyjmujemy, ze cząstki są nieruchome i znajdują się w ustalonej odległości od siebie a ich oddziaływanie opisuje hamiltonian:

$$H = g\left[\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 - \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{r})}{r^2}\right]$$

w którym g jest stałą, a $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$ są odpowiednio momentami magnetycznymi protonu i antyprotonu.

Zadanie 7 Rozważ układ dwóch cząstek A i B każda o spinie 1/2 przygotowanych w stanie dla którego wartość całkowitego spinu jest zero.

a) Zakładając, że na cząstce B nie jest wykonywany żaden pomiar, jakie jest prawdopodobieństwo, że mierząc składową z spinu cząstki A otrzymamy wynik $+\hbar/2$.

b) Powtórz powyższy punkt przyjmując, że na cząstce B została wcześniej zmierzona wartość składowej z spinu równa $+\hbar/2$.

Zadanie 8 Rozważ dwie cząstki o spinie 1/2, które w chwili $t = 0$ zostały przygotowane w stanie $|s_{1,z} = +\hbar/2\rangle \otimes |s_{2,z} = +\hbar/2\rangle$. Następnie cząstki ewoluują pod wpływem Hamiltonianu:

$$H = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

a) Znajdź stan cząstek w chwili t

b) Rozwiąż ten problem stosując rachunek zaburzeń zależny od czasu w pierwszym rzędzie, przyjmując że zburzenie w postaci H zostało włączono w chwili $t = 0$. Porównaj z rozwiązaniem ścisłym.

Zadanie 9 Cząstka o masie m ulega rozproszeniu na płytkim potencjale gaussowskim:

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2},$$

gdzie α jest stałą określającą zasięg potencjału. Oblicz amplitudę rozpraszania $f(\theta)$ i rożniczkowy przekrój czynny w przybliżeniu Borna. Pokaż, że w granicy fal długich (powolne cząstki) przekrój czynny jest izotropowy w przestrzeni i oblicz całkowity przekrój czynny w tej granicy. Izotropowość rożniczkowego przekroju czynnego wskazuje na dominującą rolę fali s w rozpraszaniu. Porównaj uzyskaną wartość przekroju czynnego, z przekrojem czynnym klasycznej cząstki punktowej rozpraszającej się na sztywnej kuli o promieniu α.

Zadanie 10 Rozważ cząstkę o masie m i ładunku e rozpraszaną na dipolu, składającym się z ładunków e i $-e$ odległych od siebie o $2a$, o kierunku prostopadłym do kierunku cząstki padającej. W przybliżeniu Borna wyznacz różniczkowy przekrój czynny dla takiego rozpraszania. W jakich kierunkach różniczkowy przekrój czynny będzie największy?

Zadanie 11 Rozważ sferycznie symetryczny potencjał:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{, dla } r \geq R \\ V_0 & \text{, dla } r < R \end{cases}$$

Stosując metodę fal parcjalnych pokaż, że w granicy $|V_0| \ll E = \hbar k^2/2m$, $kR \ll 1$ różniczkowy przekrój czynny jest izotropowy a całkowity przekrój czynny ma postać:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{16\pi}{9} \frac{m^2 V_0^2 R^6}{\hbar^4}$$

Zadanie 12 Rozważ kwantowy kład dwupoziomowy S, o wektorach bazowych $|0\rangle_S$,$|1\rangle_S$, oraz otoczenie E będące również układem dwupoziomowym przygotowanym w chwili początkowej w stanie $|0\rangle_E$. Efekt oddziaływania układu z otoczeniem reprezentuje ewolucja unitarna, której działanie na wektory bazowe $|i\rangle_S \otimes |0\rangle_E$ ma postać:

$$U|0\rangle_S \otimes |0\rangle_E = |0\rangle_S \otimes |1\rangle_S U|1\rangle_S \otimes |0\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S \otimes |1\rangle_E + |1\rangle_S \otimes |0\rangle_E).$$

Załóżmy, że w chwili początkowej stan układu i otoczenia jest postaci:

$$|\Psi\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S + e^{i\varphi}|1\rangle_S) \otimes |0\rangle_E,$$

gdzie φ jest dowolną fazą

a) Znajdź końcowy stan $|\Psi'\rangle_{SE}$ powstający w wyniku zadziałania operacją U na stan $|\Psi\rangle_{SE}$.

b) Znajdź zredukowaną macierz gęstości układu S po oddziaływaniu z otoczeniem

c) Postaraj się wymyślić jakąś miarę „dekoherencji” stanu S i odpowiedz na pytanie czy stopień dekoherencji stanu układu S zależy od wartości parametru φ.

Zadanie 13 Rozważ relatywistyczną cząstkę o spinie 1/2 o energii E, której dynamika opisywana jest równaniem Diraca, poruszającą się w kierunku z i rozpraszającą się na schodku potencjału

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 0 \\ V_0 & \text{dla } z \geq 0 \end{cases}$$

Znajdź całkowity współczynnik odbicia i transmisji. Czy znalezione współczynniki zależą od stanu spinowego cząstki?