Mechanika Kwantowa R 2014/2015, Seria 2

Zadanie 1 Stan początkowy cząstki o masie m w potencjale oscylatora harmonicznego o częstotliwości własnej ω jest dany przez:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n-1\rangle - |n\rangle\right) .$$

a) Po jakim czasie t stan ten przeewoluuje do stanu $|\psi(t)\rangle$, ortogonalnego do $|\psi(0)\rangle$?

b) Znaleźć wartości oczekiwane operatorów $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w stanie $|\psi(t)\rangle$.

Zadanie 2 Korzystając z faktu, że n-ty stan wzbudzony oscylatora harmonicznego związany jest z $n-1$-szym relacją:

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}}|n-1\rangle$$

oraz znając funkcję falową stanu podstawowego w reprezentacji położeniowej:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2 m\omega/\hbar}$$

napisz

a) Funkcję falową $\psi_2(x)$ drugiego stanu wzbudzonego w reprezentacji położeniowej

b) Tę samą funkcję falową w reprezentacji pędowej. Czy możesz sformułować ogólną obserwację dotyczącą reprezentacji położeniowej i pędowej stanów własnych oscylatora harmonicznego.

Zadanie 3 Podaj przykładowy rozkład stanów własnych oscylatora harmonicznego $|n\rangle$ jako superpozycję stanów koherentnych $|z\rangle$.

Zadanie 4 Udowodnij, ze stan koherenty można zapisać jako:

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle, \quad \text{gdzie } \hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}$$

jest tzw. operatorem przesunięcia. *Wskazówka.* Skorzystaj z tw. Bakera-Cambella-Haussdorfa.

Zadanie 5 Cząstka w jednowymiarowym oscylatorze harmonicznym zostaje w chwili t_0 oświetlona bardzo krótkim impulsem laserowym, którego wpływ można w przybliżeniu opisać hamiltonianem oddziaływania $\hat{H}_{\rm int}(t) = \hat{X}\,\delta(t-t_0)$, w którym operator $\hat{X}$ nie zależy od czasu. W wyniku oddziaływania, cząstka zwiększa swój pęd o p, niezależnie od swojego stanu przed oddziaływaniem. Wyznacz operator $\hat{X}$.

Zadanie 6 Rozważ stan oscylatora harmonicznego postaci:

$$|\psi(0)\rangle = A(|z\rangle + |-z\rangle),$$

gdzie $z \in \mathbf{C}$ a A jest stałą normalizacyjną. Jest to ciekawy stan, bo dla dużych $|z|$ można myśleć o nim jako o superpozycji kwantowej dwóch różnych „klasycznych" stanów oscylatora harmonicznego—na potrzeby medialne czasem nazywa się go nieco nie precyzyjnie stanem kota Schroedingera.

a) Wyznacz A

b) Oblicz średnie położenie, pęd i średnią energię w tym stanie

c) Oblicz stan oscylatora po czasie t. Po jakim czasie powróci on do stanu początkowego?

Zadanie 7 Dla Hamilonianu trójwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego sprawdź, że $[\bar{L}_i, H] = 0$. Uargumentuj, że dowodzi to zachowania momentu pędu w tym przypadku.

Zadanie 8 Cząstka o masie m znajduje się w nieskończonej dwuwymiarowej studni potencjału

$$V(x,y) = V_x(x) + V_y(y),$$

gdzie

$$V_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < x < a \\ +\infty & \text{dla pozostałych } x \end{cases} \quad V_y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < y < a \\ +\infty & \text{dla pozostałych } y \end{cases}.$$

W obszarze w którym potencjał jest zero stan cząstki w chwili początkowej opisywany był przez funkcję:

$$\psi(x, y, t = 0) = A \sin^3(\pi x/a) \sin^5(\pi y/b).$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź wartość oczekiwaną energii, położenia i pędu w chwili $t = 0$

c) Zapisz funkcję falową cząstki po czasie t i znajdź wartości oczekiwane energii położenia i pędu w chwili t

Zadanie 9 Cząstka o masie m porusza się w płaszczyźnie xy w polu siły o potencjale:

$$V(x,y) = \frac{k_1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{k_2}{2}(x - y)^2,$$

gdzie k_1, k_2 są pewnymi stałymi dodatnimi. Znaleźć widmo energii cząstki i wypisać postać funkcji własnych odpowiadających poszczególnym energiom. Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 w widmie pojawi się degeneracja.

Zadanie 10 Cząstka o masie m poruszająca się z zerowym całkowitym momentem pędu jest uwięziona pomiędzy dwoma nieprzenikliwymi sferami o promieniach a i b, czyli:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } r < a \\ 0 & \text{dla } a < r < b \\ +\infty & \text{dla } r > b \end{cases}.$$

a) Znajdź poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe.

b) Dla stanu o najniższej energii, znajdź średnie położenie cząstki od centrum potencjału oraz odległość najbardziej prawdopodobną

Zadanie 11 Znajdź stany związane o momencie pędu $l = 0$ w potencjale „bańki mydlanej"

$$V(r) = -\lambda\delta(r - R),$$

gdzie $\lambda > 0$. Czy stany związane zawsze istnieją?

Zadanie 12 Rozważ funkcję falową:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A \sin\theta \cos\varphi e^{-\alpha r}.$$

a) Znajdź stałą normalizacyjną A

b) Zapisz stan cząstki poprzez rozkład na harmoniki sferyczne $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$

c) Dokonując na cząstce jednoczesnego pomiaru $\hat{L}^2$ i L_z, jakie wyniki pomiaru i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać

Zadanie 13 Rozważ stan cząstki o momencie pędu $l = 1$, który w standardowej bazie $|l, m\rangle$ ma postać

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Jakie wartości i z jakimi prawdopodobieństwami można uzyskać mierząc y-kową składową momentu L_y.

Zadanie 14 Rozważ stan własny operatorów $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$, $|l, m\rangle$. Oblicz wartość oczekiwaną i dyspersję operatora rzutu momentu pędu na kierunek $\vec{n} = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0)$ w stanie $|l, m\rangle$.

Zadanie 15 W chwili $t = 0$ atom wodoru znajduje się w stanie:

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \frac{4}{(2a)^{3/2}} \left[e^{-\frac{r}{a}} Y_{0,0} + A \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \left(-iY_{1,1} + Y_{1,-1} + \sqrt{7} Y_{1,0} \right) \right]$$

gdzie a jest promieniem Bohra.

a) Oblicz stałą normalizacyjna A

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru $\hat{L}^2$ otrzymamy wartość $\hbar^2 l(l+1)$, gdzie $l = 0, 1, 2$

c) Jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $\rho(r)$, że elektron znajdziemy w odległości r od jądra.

d) Dla jakiej wartości r, $\rho(r)$ ma maksimum?

e) Zapisz postać funkcji falowej w chwili t.

f) Zapisz unormowany stan cząstki w chwili t na której wykonano pomiar L_z dający wynik $\hbar$.

Zadanie 16 Cząstka znajduje się w stanie kwantowym opisanym następująca funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = \mathcal{N} e^{-r/a} \left(\frac{z}{r} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \right)$$

Znajdź rozkład prawdopodobieństwa pomiaru $P(l, m)$, gdzie l, m są liczbami kwantowymi całkowitego momentu pędu oraz jego rzutu na oś z.

Zadanie 17 Rozważ cząstkę w stanie opisanym funkcją falową:

$$\psi(\vec{r}) = A e^{-r/a} e^{2i\varphi}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Znajdź prawdopodobieństwa $P(l, m)$ zmierzenia wartości liczb kwantowych l, m.

Wskazówka: Aby uzyskać ogólny wzór, skorzystaj z funkcji tworzącej wielomianów Legendra.

Zadanie 18 Wyznacz wszystkie wartości parametru α, dla których jest możliwe, by, w wyniku ewolucji układu opisywanego pewnym hamiltonianem, unormowany stan początkowy $|0\rangle$ przechodził po czasie t w stan $\frac{1}{\sqrt{2}}(i|0\rangle + |1\rangle)$, a unormowany stan początkowy $|1\rangle$ przechodził po tym samym czasie w stan $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \alpha|1\rangle)$.

Zadanie 19 Ile stanów związanych przewiduje wiodące przybliżenie kwasiklasyczne dla cząstki o masie μ w potencjale Morsa, $V(x) = V_0 \left(e^{-2x/a} - 2e^{-x/a} \right)$, w którym $V_0 = (2\hbar/a)^2/(2\mu)$?

Wsk.: $\frac{d}{d\alpha} \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \frac{dz}{1+z} \sqrt{\alpha - z^2} = \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \frac{dz}{1+z} \frac{1}{2\sqrt{\alpha - z^2}}$.

Zadanie 20 Znaleźć w przybliżeniu WKB poziomy energii cząstki o masie m poruszającej się w polu jednowymiarowego potencjału:

$$V(x) = V_0 \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi x}{a},$$

dla $0 < x < a$.

Zadanie 21 Stosując metodę wariacyjną oszacuj energię stanu podstawowego atomu wodoru używając jako funkcji próbnych funkcji Gaussa. Porównaj liczbową wartość otrzymanej energii z wynikiem ścisłym.

Zadanie 22 Cząstka o masie m znajduje się w potencjalne dwuwymiarowej studni:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a, 0 \le y \le a \\ +\infty & \text{pozostałe } x \text{ i } y \end{cases}$$

zaburzonej przez

$$V'(x,y) = \begin{cases} V_0 \cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a) & 0 \le x \le a, 0 \le y \le a \\ 0 & \text{pozostałe } x \text{ i } y \end{cases}$$

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń wyznacz poprawki do energii w stanie podstawowym i pierwszym w zbudzonym.

Zadanie 23 Oddziaływanie pomiędzy trzema oscylatorami harmonicznymi o częstościach ω_a, ω_b i ω_c dane jest hamiltonianem

$$\hat{H}_{\text{int}} = g\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{c} + h.c.,$$

gdzie $g \in \mathbf{C}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ są operatorami anihilacji dla odpowiednich oscylatorów, a "$h.c.$ oznacza sprzężenie hermitowskie już wypisanych wyrazów. Wyznacz z dokładnością do wyrazów kwadratowych w g poprawki do poziomów energetycznych hamiltonianu bez oddziaływania. Możesz założyć, że częstości oscylatorów dobrane są w taki sposób, że nie występuje degeneracja w hamiltonianie bez oddziaływania.

Zadanie 24 Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w polu siły o potencjale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \alpha x^4$.

a) Znajdź poprawkę do energii stanu podstawowego w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń traktując człon αx^4 jako małe zaburzenie.

b) Postaraj się poprawić ten wynik (zbliżyć się do prawdziwej wartości) stosując metodę wariacyjną wykorzystując funkcję próbną postaci: $\psi_\lambda(x) = \mathcal{N}_\lambda e^{-\lambda x^2}$, gdzie λ jest parametrem wariacyjnym